T 136

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Tesis Doctoral

"Diversos aspectos de la teoría de Kaluza-Klein"

Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Director: Prof. Héctor Vucetich

Jurados: Prof. Ricardo Gamboa Saraví, Prof. Fidel Schaposnik, Prof. Diego Harari.

[1997]

A mi familia

Indice

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi director, Héctor Vucetich. De él aprendí la metodología de trabajo que creo adecuada para llevar a cabo cualquier tarea de investigación en física teórica. Además no puso reparo alguno en que eligiera, según mi criterio, tanto el tema de trabajo como mis colaboradores, y siempre siguió con entusiasmo mis progresos.

Vaya también mi agradecimiento a aquellos con quienes trabajé ya sea en las contribuciones originales de esta tesis (L. Anchordoqui y D. Torres) o en trabajos no directamente relacionados con ésta (G. Romero): las discusiones que mantuvimos contribuyeron invariablemente a enriquecer nuestros conocimientos, y los momentos de esparcimiento, a fortalecer nuestra amistad.

No puedo dejar de mencionar a la gente con la que comparto mi ámbito de trabajo, en especial a M. V. Manías y M. Trobo quienes, junto con algunos de los mencionados antes, se tomaron el trabajo de leer versiones preliminares de capítulos de esta tesis. Sus observaciones y comentarios fueron de gran utilidad.

Por último, el agradecimiento mas especial es hacia mi familia, que estuvo a mi lado durante toda mi carrera, y en particular a mis padres: sin el apoyo incondicional que me brindaron, llegar a esta instancia hubiese sido indudablemente mucho mas difícil.

Capítulo 1

INTRODUCCION

La construcción de teorías que unifiquen las interacciones fundamentales es una tarea de máxima importancia en la física teórica. Actualmente disponemos de modelos que describen la fenomenología que se manifiesta en el intervalo de energías accesibles a través del experimento mediante cuatro interacciones básicas, que pueden ser unificadas postulando la validez de ciertas simetrías (como ser la de gauge o la supersimetría). Sin embargo, hacia 1920 sólo se conocían la interacción electromagnética y la gravitatoria, y aún no se había desarrollado la Mecánica Cuántica. En este marco fué que Kaluza [1] propuso la primera teoría de unificación [1]. El carácter de esta teoría era totalmente distinto de lo que hoy entendemos por teoría de unificación: se trataba de una unificación geométrica, basada en la estructura de la Relatividad General. La hipótesis básica de Kaluza fué la existencia de una dimensión espacial extra, que permite acomodar al tensor de campo electromagnético en las ecuaciones de movimiento de la gravitación en 5 dimensiones. Poco tiempo mas tarde, Klein [4] y luego Einstein y Bergmann [5] dieron bases mas sólidas a la idea de Kaluza al dotar a la dimensión extra con la topología de S^1.

Hacia 1963, De Wit logró generalizar la propuesta de Kaluza-Klein con el fin de describir a las teorías de Yang-Mills [6]. En lugar de una dimensión extra con topología S^1, introdujo n dimensiones espaciales que conforman una variedad compacta; el grupo de isometrías de la variedad elegida ($U(1)$ en el caso de S^1) determinaba la teoría de gauge "efectiva" en 4 dimensiones (esto es, el electromagnetismo en el caso de una dimensión extra). Este avance dió lugar a a una serie de trabajos de Rayski [7], Kerner [8], Trautmann [9], Freund [10], y Cho [11], entre otros, que formalizaron la popuesta de De Wit y clarificaron la estructura geométrica subyacente de la teoría; esta formalización hizo evidentes los problemas que presenta la teoría en su forma original. Entre otros [2], es necesario incorporar campos de materia a la acción $4+n$ dimensional para que el espacio n-dimensional no sea observable [12]. Como no hay simetría alguna que restrinja el contenido de materia, la teoría no es

[1] Existen algunos intentos previos, como el de Nordström (previo a la Relatividad General [2]), y el de Weyl [3]. En este último, tanto la dirección como la longitud de un vector cambian al transportarlo desde un punto P a uno P' siguiendo caminos distintos.

[2] Estos problemas estan detallados en la sección 2.2

única. Otro problema igualmente importante es la imposibilidad de incorporar fermiones que tengan una quiralidad definida en 4 dimensiones.

La situación tomó un giro inesperado con la aparición de la Supergravedad, que requiere de un espacio-tiempo de dimensión menor o igual que 11 para ser consistente [13]. En particular, Cremmer, Julia y Scherck [14] construyeron el lagrangiano para el caso $N = 1, d = 11$, que es único si se exigen ecuaciones de campo de orden 2 como máximo. Por primera vez se proponía entonces una teoría en un espacio-tiempo con $d > 4$ y con un contenido de materia bien definido (a partir de la supersimetría). La unión de la teoría de Kaluza-Klein con la Supergravedad resultó ser fuctífera, y dió lugar a varias propuestas interesantes [3]. Sin embargo subsistían todavía ciertos problemas (entre otros, la no renormalizabilidad de la gravitación) que hicieron que el esfuerzo se volcase hacia otras teorías multidimensionales, como ser las Supercuerdas. De todas maneras, es posible extraer conclusiones generales (es decir, relativamente independientes de la teoría original) y basadas casi exclusivamente en la hipótesis de que el espacio-tiempo tiene mas de 4 dimensiones. En esta tesis se estudian dos de las consecuencias de esta hipótesis, ambas relacionadas con la existencia de soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento.

En el capítulo I se presenta la teoría de Kaluza-Klein en su forma original: se analiza en detalle el caso de una dimensión espacial extra (en especial el espectro de masas), y la generalización a un número arbitrario de dimensiones. Por último, se discute la posibilidad de que la teoría describa adecuadamente la fenomenología que se observa en la actualidad. Oportunamente se menciona cómo la Supergravedad resuelve algunos de los problemas que presenta la teoría de Kaluza-Klein pura.

En el capítulo II se reseñan las soluciones tipo *wormhole* de la teoría de la Relatividad General, y su relación con las distintas condiciones de energía a las que podría estar sometida la materia que genera el *wormhole*, y finalmente se estudian en detalle las soluciones de *wormhole* en la teoría de Brans-Dicke (esta última está brevemente discutida en el Apéndice).

En el capítulo III se hace un repaso del modelo standard de la cosmología y de la teoría de la inflación. Luego se pasa revista a diversos modelos alternativos (en particular, homogéneos e inhomogéneos), y a los principales resultados de la cosmología multidimensional. Por último se estudia la posibilidad de inflación en modelos inhomogéneos multidimensionales.

Cabe mencionar que durante el desarrollo de esta tesis llevé a cabo otros trabajos no directamente relacionados con la teoría de Kaluza-Klein , de los cuales no daré cuenta aquiía. Estos son:

- *Axiomatic foundations of nonrelativistic quantum mechanics: a realistic approach*

[3]Una lista exhaustiva de la bibliografía del tema puede verse en [16].

S. Perez Bergliaffa, G. Romero y H. Vucetich [17]

- *Variable rest mass in 5-dimensional gravitation faced to experimental data*
  L. Anchordoqui, G. Birman, S. Perez Bergliaffa y H. Vucetich [18]

- *Axiomatic foundations of quantum mechanics revisited: the case of systems*
  S. Perez Bergliaffa, G. Romero y H. Vucetich [19]

- *A possible source of extragalactic cosmic rays with arrival energies beyond the GZK cutoff*
  G. Romero, J. Combi, S. Perez Bergliaffa y L. Anchordoqui [20]

Capítulo 2

LA TEORIA DE KALUZA-KLEIN

2.1 El caso 5-dimensional

En 1921, el matemático T. Kaluza publicó uno de los primeros intentos de unificación de las interacciones conocidas en ese entonces: la Relatividad General y el Electromagnetismo [1]. La hipótesis básica de la teoría surge en forma natural al comparar la definición del tensor de campo electromagnético

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{2.1}$$

con la definición de los símbolos de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma^{\sigma}_{\ \mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \tag{2.2}$$

Es inevitable pensar que el tensor de campo electromagnético está representado por símbolos de Christoffel "truncados". Sin embargo, como en la teoría de la Relatividad General en 4 dimensiones absolutamente todos los Christoffels se usan para describir a la gravitación, Kaluza hizo la hipótesis de que el espacio-tiempo tiene en realidad 5 dimensiones (5-d). De esta manera, el número total de Christoffels es suficiente para incorporar al campo electromagnético. El elemento de línea de el espacio-tiempo 5-d está dado entonces por

$$ds^2 = \gamma_{AB}dx^A dx^B \tag{2.3}$$

$(A, B = 0, ..., 4)$. Para explicar el hecho de que sólo observamos cambios de las cantidades físicas con las coordenadas del espacio-tiempo de cuatro dimensiones (4-d), Kaluza impuso la "condición de cilindricidad":

$$\partial_4 \gamma_{AB} = 0 \tag{2.4}$$

Adoptando la definición $\gamma_{4\mu} = \beta A_\mu$, con $\beta =$ constante, Kaluza mostró (en la aproximación de campo débil, y con $\gamma_{44} = 1$) que las ecuaciones de Einstein de vacío en 5-d se reducen a las ecuaciones de Einstein en 4-d para $A, B = \mu, \nu$, y a las de Maxwell para $A, B = \mu, 4$.

Cinco años mas tarde, O. Klein dió una base matemática más firme a la idea original de Kaluza [4]. En particular, obtuvo las ecuaciones de Einstein y de Maxwell en 4-d a partir de la variación de la acción

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-\gamma}\, R_5 \tag{2.5}$$

donde R_5 y G_5 son el escalar de curvatura y la constante gravitacional en 5-d respectivamente, y mostró que una transformación de coordenadas en la dimensión extra equivale en esta teoría a lo que hoy sabemos que es una transformación de gauge. Vale la pena examinar en detalle la teoría 5-d. La acción (2.5) es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas [21]:

$$\delta g_{AB} = \partial_A \xi^C g_{CB} + \partial_B \xi^C g_{CA} + \xi^C \partial_C g_{AB} \tag{2.6}$$

donde $\xi^A = \xi^A(x)$, y $A, B, C... = 0, ...4$, $\mu, \nu = 0, ...3$. En lugar de imponer la condición (2.4), que suprime sin explicación la dependencia de la métrica con la coordenada extra, es conveniente suponer que la variedad asociada al espacio-tiempo es el producto directo $V^4 \times S^1$, donde V^4 es el espacio-tiempo físico 4-d [1]. El vacío tiene asociada entonces a la variedad producto directo $M^4 \times S^1$ formada por el espacio de Minkowski 4-d y el círculo S^1; esta variedad es solución trivial de las ecuaciones de Einstein en 5-d. Dicha hipótesis implica, en términos de simetrías, que la invariancia original del vacío de la teoría (representada por P_5, el grupo de Poincarè en 5-d) está espontáneamente rota en $P_4 \times U(1)$.

La métrica 5-d puede parametrizarse en forma totalmente general como sigue:

$$\gamma_{AB}(x^\mu, x^4) = \phi^{-1/3}\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \phi & A_\mu \phi \\ A_\nu \phi & \phi \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Las funciones que aparecen en (2.7) pueden depender de las 5 coordenadas espacio-temporales, y el factor de Weyl $\phi^{-1/3}$ se agrega para simplificar la forma final de la acción [2]. La topología de la variedad permite desarrollar en serie de Fourier en la coordenada x^4 a todos los campos que aparecen en (2.7):

$$\phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x^\mu)\, e^{inmx^4} \tag{2.8}$$

(y desarrollos análogos para $g_{\mu\nu}$ y A_μ), y al parámetro de la transformación de coordenadas (m es el inverso del radio de S^1 : $0 \leq mx^4 \leq 2\pi$). Reteniendo sólo el modo cero de los

[1] Esta hipótesis fué sugerida por Klein [15], e investigada en profundidad por Einstein y Bergmann [5].

[2] Formalmente, el campo ϕ juega el rol de un campo de Brans-Dicke [22], y fué considerado un artificio de la teoría hacia 1920; por lo tanto se lo consideraba constante. Veremos mas adelante que esto dá lugar a inconsistencias. Años mas tarde, fue reintroducido por Jordan [23] y Thiry [24].

desarrollos y realizando la integración trivial en x^4, se logra la "reducción dimensional" de la acción (2.5), que puede escribirse (sin explicitar el subindice 0)

$$S_4 = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_4 + \frac{1}{4}\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{2.9}$$

donde R_4 es el escalar de curvatura calculado a partir de $g_{\mu\nu}$, $G \equiv G_5/2\pi r_5$, y $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Esta acción es formalmente idéntica a la de la gravitación 4-d usual en interacción con el campo electromagnético y un campo escalar, con la salvedad de que la constante de acoplamiento "efectiva" de $F_{\mu\nu}$ con la gravitación es $G_g = G/\phi$ [3]. Es necesario señalar que la forma de S_4 sólo depende de la elección del vacío, y no de la parametrización elegida para la métrica.

A pesar de la identidad mencionada antes, resta demostrar que los campos que aparecen en S_4 se transforman correctamente frente a transformaciones de coordenadas. De la ecuación (2.6) puede verse que S_4 es invariante bajo las siguientes transformaciones generales de coordenadas con parámetro ξ^μ:

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu\xi^\rho g_{\mu\rho} + \xi^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} \tag{2.10}$$
$$\delta A_\mu = \partial_\mu\xi^\rho A_\rho + \xi^\rho\partial_\rho A_\mu \tag{2.11}$$
$$\delta\phi = \xi^\rho\partial_\rho\phi \tag{2.12}$$

(nuevamente se han obviado los subíndices 0). De aquí se vé que el modo cero de los campos $g_{\mu\nu}$, A_μ, y ϕ se transforma respectivamente como un tensor, un vector, y un escalar frente a transformaciones generales de coordenadas en 4-d. Además, S_4 es invariante bajo transformaciones de gauge locales con parámetro ξ^4, dadas por

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\xi^4 \tag{2.13}$$

y frente a transformaciones globales de escala:

$$\delta A_\mu = \lambda A_\mu \qquad\qquad \delta\phi = -2\lambda\phi \tag{2.14}$$

La ecuación (2.13) muestra que la invariancia de gauge en la teoría 4-d puede interpretarse como una invariancia del espacio-tiempo en 5-d, y por lo tanto tiene un origen geométrico. El mismo origen tiene la conjugación de carga, que no es mas que la transformación de paridad $x^4 \to -x^4$ en la dimensión extra [4].

[3] La dependencia de las constantes de acoplamiento con las coordenadas es una característica común a todas las teorías de unificación en $d > 4$ [25].

[4] Al considerar la ecuación de movimiento para un campo escalar en la geometría 5-d dada por $M^4 \times S^1$ se obtiene como resultado que la carga está cuantizada, y queda clara la relación entre conjugación de carga y paridad [26].

2.1.1 Espectro de masas

En esta sección determinaremos el espectro clásico de masas de los distintos modos de la teoría 5-d. En ausencia de campos de materia, las ecuaciones de movimiento son

$$R_{AB} = 0 \tag{2.15}$$

y la solución de vacío está dada por $< 0|g_{AB}|0 >= \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,r_5^2) \equiv \eta_{AB}$. Desarrollando el campo g_{AB} alrededor de este vacío según

$$g_{AB}(x,x^4) = \eta_{AB} + h_{AB}(x,x^4) \tag{2.16}$$

y reteniendo en la ecuación (2.15) hasta el primer orden en h_{AB} obtenemos

$$\partial_B\partial_A h^C_{\ C} - \partial_C\partial_A h^C_{\ B} - \partial_C\partial_B h^C_{\ A} + \partial^C\partial_C h_{AB} = 0 \tag{2.17}$$

Esta ecuación es invariante bajo transformaciones del tipo

$$h_{AB} \to h_{AB} + \partial_A\xi_B + \partial_B\xi_A \tag{2.18}$$

y por lo tanto es posible elegir un gauge conveniente, dado por

$$\partial^\mu h_{\mu 5} = 0 \qquad \partial^5 h_{\mu 5} = 0 \qquad \partial^5 h_{55} = 0 \tag{2.19}$$

Debido a que la variedad interna es compacta, podemos desarrollar a h_{AB} en modos normales:

$$h_{AB}(x,x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^{(n)}_{AB}(x^\mu)\, e^{inx^4} \tag{2.20}$$

La ecuación (2.19) implica que

$$\partial^\mu h^{(0)}_{\mu 5}(x) = 0 \qquad h^{(n)}_{\mu 5}(x) = 0 \qquad h^{(n)}_{55}(x) = 0 \tag{2.21}$$

(con $n \neq 0$). Es decir que la elección del gauge (2.19) elimina a $h^{(n)}_{\mu 5}$ y $h^{(n)}_{55}$ ($n \neq 0$). Para cada n, y en el caso de que $h^{(n)}_{\mu 5}$ y $h^{(n)}_{55}$ tengan masa nula, esto equivaldría a eliminar tres grados de libertad (dos de $h^{(n)}_{\mu 5}$ y uno de $h^{(n)}_{55}$) que supuestamente son reales, y por lo tanto no pueden desaparecer. La solución para este problema sería que $h^{(n)}_{\mu 5}$ y $h^{(n)}_{55}$ sean bosones de Goldstone asociados a alguna simetría espontáneamente rota de la teoría, y que los modos tensoriales $h^{(n)}_{\mu\nu}$ adquieran masa absorbiendo estos tres grados de libertad [5]. En este punto es necesario entonces estudiar las simetrías de la teoría completa (es decir, con la inclusión de los modos con $n \neq 0$). Estas derivan de la invariancia bajo transformaciones generalizadas de coordenadas en 5-d. Tales transformaciones son

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x,x^4) \qquad\qquad x^4 \to x^4 + \xi^4(x,x^4) \tag{2.22}$$

[5]Recordemos que una partícula de spin 2 con masa tiene justamente cinco grados de libertad.

con

$$\xi^A(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^A(x^\mu)\, e^{inmx^4} \tag{2.23}$$

Vemos entonces que, debido a la topología del vacío, sólo son posibles las transformaciones periódicas en x^4.

En la Relatividad General en 4-d puede considerarse a la invariancia local de Poincaré como un caso particular de la covariancia general, en el que las transformaciones infinitesimales de coordenadas están restringidas a la forma

$$\xi^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \tag{2.24}$$

con a_μ y $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}=$ constante. En forma análoga, existen transformaciones en 5-d dadas por

$$\xi^{(n)\mu}(x) = a^{(n)\mu} + \omega_\nu^{(n)\mu} x^\nu \qquad \xi^{(n)5}(x) = c^{(n)} \tag{2.25}$$

(con a^n_μ, $\omega^n_{\mu\nu}$ y $c^{(n)}$ = constante) cuyos generadores se calculan de la forma usual, y son

$$\begin{aligned} P_n^\mu &= e^{inmx^4}\partial^\mu \\ M_n^{\mu\nu} &= e^{inmx^4}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \\ Q_n &= ie^{inx^4}\partial/\partial x^4 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Estos son generadores de un álgebra de Lie no compacta y de infinitos parámetros, y las relaciones de conmutación muestran que se trata de un álgebra de Kac-Moody-Virasoro [27], que es simetría global y exacta de la teoría completa. Sin embargo, la simetría del vacío, determinada por los valores de expectación

$$< g_{\mu\nu} >= \eta_{\mu\nu} \qquad < A_\mu >= 0 \qquad < \phi >= \phi_0 \tag{2.27}$$

es el producto $P_4 \times U(1)$. Esta ruptura de simetría global hace que aparezcan bosones de Goldstone. A partir de la transformación de los distintos campos bajo la acción de los generadores de simetrías rotas es posible identificar a los bosones de Goldstone, que son $h^{(n)}_{\mu 5}$ y $h^{(n)}_{55}$.

Volviendo al problema de las masas, si sustituimos (2.23) en (2.17) y usamos (2.21), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\partial^\lambda\partial_\lambda h^{(0)}_{55} = 0 \qquad h^{\lambda(n)}_{\lambda} = 0 \quad (n \neq 0) \tag{2.28}$$

$$\partial^\lambda\partial_\lambda h^{(0)}_{\mu 5} = 0 \qquad h^{\lambda(n)}_{\mu\lambda} = 0 \quad (n \neq 0) \tag{2.29}$$

$$\partial^\lambda\partial_\lambda h^{(0)}_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu(h^{\lambda(0)}_{\lambda} + h^{5(0)}_{5}) - \partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda(0)}_{\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu h^{\lambda(0)}_{\mu} = 0 \tag{2.30}$$

$$\left(\partial^\lambda\partial_\lambda + \frac{n^2}{r_5^2}\right) = 0 \quad (n \neq 0) \tag{2.31}$$

De la última ecuación se vé que los modos tensoriales con $n \neq 0$ son masivos, y con masas del orden de m_{Planck}. Las ecuaciones (2.28) y (2.29) muestran que $h_{55}^{(0)}$ y $h_{\mu 5}^{(0)}$ tienen masa nula. Por último, definiendo

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(0)} = h_{\mu\nu}^{(0)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_5^{5(0)} \tag{2.32}$$

la ecuación (2.30) puede escribirse de la forma

$$\partial^\lambda \partial_\lambda \bar{h}_{\mu\nu}^{(0)} + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\lambda(0)}_{\ \lambda} - \partial_\lambda \partial_\mu \bar{h}^{\lambda(0)}_{\ \nu} - \partial_\lambda \partial_\nu \bar{h}^{\lambda(0)}_{\ \mu} = 0 \tag{2.33}$$

que es la ecuación de una partícula sin masa de spin dos [28].

La acción que se obtiene truncando la teoría para eliminar los modos con $n \neq 0$ fué obtenida en la sección anterior:

$$S_4 = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_4 + \frac{1}{4}\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{2.34}$$

La invariancia de gauge de (2.34) bajo las transformaciones

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi^4 \tag{2.35}$$

hace que A_μ no tenga masa. De la misma manera, la invariancia de (2.34) frente a las transformaciones

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{2.36}$$

hace que el gravitón tenga masa nula. Recordemos además que (2.34) es invariante frente a transformaciones de escala globales

$$\delta g_{\mu\nu} = 0 \qquad \delta A_\mu = \lambda A_\mu \qquad \delta\Phi = -2\lambda\Phi \tag{2.37}$$

con λ infinitesimal. El vacío de la teoría truncada es

$$< g_{\mu\nu} >= \eta_{\mu\nu} \qquad < A_\mu >= 0 \qquad < \phi >= \phi_0 \tag{2.38}$$

La simetría de este vacío es el producto $P_4 \times \Re$ [6]. Como $< \Phi >$ no es cero, el vacío no es invariante frente a las transformaciones globales de escala, y por lo tanto Φ es el bosón de Goldstone asociado a la ruptura de esta simetría del vacío de la teoría truncada. Sin embargo, al considerar la teoría completa, la transformación de escala global deja de ser simetría, ya que equivale a un cambio de escala de la métrica dado por

$$g_{AB} \to \left(1 + \frac{2\lambda}{3}\right) g_{AB} \tag{2.39}$$

seguido de una transformación general de coordenadas en la cual

$$\xi^A = \delta^A_5(-\lambda r_5 x^4) \tag{2.40}$$

[6] El grupo de gauge es $\Re$ y no $U(1)$ debido a que no queda vestigio alguno de la periodicidad en x^4.

Esta última transformación no es periódica, lo que implica que en realidad Φ es un boson de Goldstone sólo al considerar la teoría con $n = 0$, y que adquirirá masa al tener en cuenta correcciones radiativas.

En resumen, el espectro de partículas clásico de la teoría 5-d completa está compuesto por tres partículas de masa nula ($A_\mu^{(0)}$, $g_{\mu\nu}^{(0)}$, y $\Phi^{(0)}$), y una torre de modos masivos de spin dos ($g_{\mu\nu}^{(n)}$).

Para terminar con la teoría en 5-d mencionemos algunas características que la distinguen de los casos en un número de dimensiones mayor:

- La ecuación de movimiento para Φ implica que $\Box \ln \Phi \sim F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, y por lo tanto es incorrecto suponer que $\Phi = 1$ con $F_{\mu\nu} \neq 0$ [21].
- La variedad "interna" (esto es, S^1) es solución de las ecuaciones de movimiento.
- La compactificación de la variedad interna es una hipótesis *ad hoc*: sería mucho mas satisfactorio que la dinámica de la teoría implicara que el espacio interno tenga una dimensión característica del orden de la longitud de Planck.
- Debido a que el tensor de Ricci de S^1 es nulo, no aparece un potencial para el campo escalar en la acción 4-d.

2.2 Generalización no abeliana

Con la aparición de las teorías de Yang-Mills [29] en 1954, la unificación tipo Kaluza-Klein volvió a ser tenida en cuenta [6]. El punto clave en esta nueva instancia fué el reconocimiento de que el grupo de gauge que se obtiene en 4-d está relacionado con el grupo de isometrías [7] de la variedad correspondiente a las dimensiones extras. Como vimos en la sección anterior, el grupo abeliano U(1) que aparecía en la aproximación de bajas energías era en realidad una simetría del espacio-tiempo 5-d, representada por la transformación

$$x^4 \to x'^4 = x^4 + \xi^4(x) \tag{2.41}$$

sobre la coordenada asociada a la variedad compacta S^1. En términos geométricos, esto es equivalente a decir que $K_4 = \partial/\partial x^4$ es un vector de Killing tipo espacio de la métrica 5-d, y el espacio-tiempo 4-d es el espacio de las clases de equivalencia del espacio-tiempo 5-d bajo el grupo de movimientos de K_4. La isometría generada por este campo aparece como la simetría de gauge $U(1)$ en el espacio-tiempo 4-d. Parecería entonces que si se quiere que en el caso $4 + n$ dimensional el grupo de gauge observable a bajas energías sea un grupo compacto G, debemos buscar una variedad cuyo grupo de isometrías sea G.

[7] La definición de grupo de isometrías puede hallarse en [30].

Sea $V^4 \times B^n$ la variedad correspondiente al espacio-tiempo $4+n$ dimensional, y G el grupo de isometrías de B^n. Dicho grupo está generado por n campos vectoriales de Killing, que forman una base del álgebra de Lie de G:

$$[K_a, K_b] = -f^c_{ab} K_c \tag{2.42}$$

$(a, b, ... = 4, ...4+n)$ y son un conjunto completo, en el sentido de que sus curvas integrales cubren a B^n. Por lo tanto, V^4 es el espacio cociente $(V^4 \times B^n)/G$ de las clases de equivalencia bajo transformaciones pertenecientes a G de $V^4 \times B^n$ [31].

Sea $g_{\mu\nu}$ la métrica de V^4, y ϕ_{ab} la métrica de B^n. Por analogía con el caso 5-d, es natural proponer

$$\gamma_{AB}(x^\mu, y^a) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + B^a_\mu B^b_\nu \phi_{ab} & B^c_\mu \phi_{ca} \\ B^c_\nu \phi_{cb} & \phi_{ab} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

y adoptar la acción de Einstein-Hilbert en $4+n$ dimensiones:

$$S_{4+n} = -\frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^{4+n}x \sqrt{-\gamma}\, (R_{4+n} + \Lambda_{4+n}) \tag{2.44}$$

donde $\gamma \equiv \det(\gamma_{AB})$, Λ_{4+n} es la constante cosmológica en $4+n$ dimensiones, R_{4+n} es el escalar de curvatura $4+n$ dimensional, $\{x^\mu\}$ son las coordenadas de V^4, y $\{y^a\}$ las de B^n. Suponiendo que $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ y $\phi_{ab} = \phi_{ab}(y)$, la acción (2.44) puede escribirse

$$S_{4+n} = \int d^4x\, \mathcal{L}_4(x) \tag{2.45}$$

donde la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_4(x) = -\frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^ny \sqrt{-g(x)} \sqrt{\phi(y)}\, (R_{4+n} + \Lambda_{4+n}) \tag{2.46}$$

A partir de (2.43) se calcula R_{4+n} y se obtiene [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(x) \quad &= \quad -\frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^ny \sqrt{\phi(y)} \sqrt{-g(x)}\, \{R_4(x) + R_n(y) + \\ &\quad +\Lambda_{4+n} + \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^b_{\rho\sigma} g^{\mu\rho}(x) g^{\nu\sigma}(x) \phi_{ab}(y)\} \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde

$$G^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu B^a_\mu - \partial_\mu B^a_\nu + B^b_\mu \partial_b B^a_\nu - B^b_\nu \partial_b B^a_\mu \tag{2.48}$$

Ahora usamos las simetrías de B^n para llevar la ec. (2.48) a la forma de un rotor de Yang-Mills. Para ello, recordemos que la ec. (2.42) puede escribirse

$$[K_a(y), K_b(y)]^c \equiv K^d_a \partial_d K^c_b - K^d_b \partial_d K^c_a = -f^e_{ab} K^c_e(y) \tag{2.49}$$

Definiendo

$$B^a_\mu = K^a_b(y) A^b_\mu(x, y) \tag{2.50}$$

que en la aproximación del modo cero se escribe

$$B^a_\mu = K^a_b(y) A^b_\mu(x) \tag{2.51}$$

la ecuación (2.48) toma la forma

$$G^a_{\mu\nu} = K^a_b(\partial_\nu A^b_\mu - \partial_\mu A^b_\nu - f^b_{cd} A^c_\mu A^d_\nu) \tag{2.52}$$

Introduciendo el rotor

$$F^b_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu A^b_\mu - \partial_\mu A^b_\nu - f^b_{cd} A^c_\mu A^d_\nu \tag{2.53}$$

la densidad lagrangiana (2.47) puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4(x) &= -\frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^n y \sqrt{\phi(y)} \sqrt{-g(x)} \, [R_4(x) + R_n(y) + \\ & \Lambda_{4+n} + \frac{1}{4} \phi_{ab}(y) K^a_c(y) K^b_d(y) F^c_{\mu\nu} F^d_{\rho\sigma}(x) g^{\mu\rho}(x) g^{\nu\sigma}(x) \Big] \end{aligned} \tag{2.54}$$

Definiendo la constante gravitacional G según

$$\frac{1}{16\pi G} \equiv \frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^n x \sqrt{\phi(y)} \, , \tag{2.55}$$

eligiendo $\Lambda_{4+n}/16\pi G$ de manera tal que cancele la integral sobre $R_n(y)$ [32], y normalizando los vectores de Killing según

$$\frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^n y \sqrt{\phi(y)} \phi_{ab}(y) K^a_c(y) K^b_d(y) = \delta_{cd} \tag{2.56}$$

se obtiene la acción de la gravitación en 4-d mas el lagrangiano usual de Yang-Mills, dado por el último término de (2.54):

$$\mathcal{L}_{YM}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} \tag{2.57}$$

De la ecuación (2.6) se prueba que A^a_μ se transforma como un campo de gauge en el caso de la transformación $\xi^A(x,y) = (0, \xi^i(x) K^{im}(y)$. Por lo tanto, aún en el caso de un número arbitrario de dimensiones, los elementos no diagonales de la métrica dan lugar a campos de gauge, y las simetrías que que percibimos como internas en 4-d pueden interpretarse como simetrías espacio-temporales en las dimensiones extras.

Para determinar el espectro de partículas en este caso, se sigue un procedimiento análogo al caso 5-d: se consideran fluctuaciones arbitrarias de todos los campos a partir de la solución de vacío, y se desarrollan estas fluctuaciones en un conjunto completo de armónicos sobre la variedad interna. Los coeficientes de este desarrollo son los campos en 4-d, y al sustituir los desarrollos en las ecuaciones de movimiento en $4+n$ dimensiones se obtienen las ecuaciones de movimiento en 4-d, y por ende el espectro de masas. Hay que señalar sin embargo ciertas dificultades técnicas:

- El vacío de la teoría en $4+n$ dimensiones, dado por

$$< 0|g_{AB}|0 >= \mathrm{diag}(\eta_{\mu\nu}, -g_{mn}(x^4, ..., x^n)) \tag{2.58}$$

  no es en general solución de las ecuaciones de movimiento en $4+n$ dimensiones. Como veremos mas adelante, en la teoría de Kaluza-Klein pura es necesario agregar campos de materia en la acción original para lograr que (2.58) sea solución. Las fluctuaciones de estos campos alrededor del vacío correspondiente contribuyen al espectro, que depende entonces de los campos extras elegidos para lograr la compactificación.

- La expansión en armónicos de la variedad interna es en general mucho mas complicada que en el caso 5-d [33]; para la Supergravedad $N = 1$, $d = 11$, Castellani *et al* calcularon el espectro a partir de la solución de Freund-Rubin [34] con una 7-esfera como espacio interno [35].

En este punto se imponen varios comentarios:

1. La teoría no explica la compactificación espontánea del vacío.

2. La variedad $M^4 \times B^n$ asociada con el vacío de la teoría no es en general solución de las ecuaciones de Einstein en vacío $4+n$ dimensional. Esto se vé de la siguiente manera: las ecuaciones de campo $R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}(R_{4+n} + \Lambda_{4+n}) = 0$ para $A, B = 0, ...3$ implican que $R_{4+n} + \Lambda_{4+n} = 0$. Por lo tanto, $R_{AB} = 0\ \forall A, B$, y en particular, $R_{ij} = 0$. Luego B^n tiene curvatura nula, condición que en general no se cumple [8].

3. El vacío de la teoría es clasicamente estable, pero inestable frente a procesos semiclásicos del tipo "penetración de barrera" (al menos en el caso 5-d [36]).

4. En el proceso de reducción dimensional es esencial mantener la consistencia con las ecuaciones de campo en $4+n$ dimensiones; esto significa que las soluciones de las ecuaciones de campo en 4-d deben ser también soluciones de las ecuaciones de campo en $4+n$ dimensiones. Esto no ocurre cuando se trabaja en la aproximación del modo cero para un número arbitrario de dimensiones internas.

5. Presumiblemente, en el universo primitivo, todas las dimensiones espaciales eran de tamaño similar. La teoría debería tener en consecuencia soluciones cosmológicas que describan al universo en su forma actual, esto es, la variedad $F^4 \times B^n$, donde F^4 es el universo de Friedmann-Robertson-Walker que observamos actualmente, y B^n es una variedad compacta, con un tamaño característico del orden de la longitud de Planck.

A continuación haremos un breve análisis de los ítems enumerados arriba, con la salvedad de que el punto 6 será tratado en un capítulo aparte.

[8] Recordar que condición necesaria y suficiente para la ausencia de efectos gravitacionales es que $R^A_{BCD} = 0\ \forall A, B, C, D$.

Mecanismos de compactificación espontánea del vacío

Entre los mecanismos propuestos para lograr la compactificación de las dimensiones extras, podemos citar los siguientes: (a) aquellos que requieren la introducción de campos de materia en $4+n$ dimensiones que den lugar a un tensor de energía impulso no nulo [12], y (b) aquellos en los cuales la acción gravitacional difiere de la de Einstein. En el primer caso, se parte de las ecuaciones de Einstein

$$R_{AB} - \frac{1}{2}\left(R_{4+n} + \Lambda_{4+n}\right) g_{AB} = 8\pi G_{4+n} T_{AB} \tag{2.59}$$

Si imponemos que el vacío tenga la forma $M_4 \times K$, con K compacta, debe cumplirse que $R_{\mu\nu} = 0$, y también, debido a la invariancia de Lorentz,

$$T_{\mu\nu} = \frac{c}{8\pi G_{4+n}}\, \eta_{\mu\nu} \tag{2.60}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de M_4, y c es una constante. Si además suponemos que K es un espacio maximalmente simétrico, de manera tal que

$$T_{mn} = \frac{\bar{c}}{8\pi G_{4+n}}\, g_{mn} \tag{2.61}$$

($\bar{c}$ es una constante), de la ecuación (2.59) se desprende que

$$R^{(n)} = n(\bar{c} - c) \qquad \Lambda_{4+n} = -n\bar{c} + (n-2)c \tag{2.62}$$

La primera de estas ecuaciones muestra que la compactificación ocurre siempre y cuando se cumpla que $\bar{c} - c < 0$. Algunos ejemplos de este tipo son:

- Compactificación debida a campos de gauge en $4+n$ dimensiones: si hay campos de gauge $G^{\mu\nu}_a$ 'fundamentales" (es decir no provenientes de la métrica), estos dan lugar al tensor de energía-impulso

  $$T_{AB} = \frac{1}{4} G_{CD} \cdot G^{CD} g_{AB} - G_{AC} \cdot G^{C}_{B} \tag{2.63}$$

  Suponiendo que $G^{a}{}_{AB}$ tiene un valor medio de vacío que es distinto de cero sólo en el espacio interno, y que éste último es compacto y de Einstein,

  $$\bar{c} - c = -2k \tag{2.64}$$

  con $k > 0$. A pesar de que esta opción es contraria al espíritu original de la teoría de Kaluza-Klein, ha sido considerada por varios autores, en especial en el caso de configuraciones topologicamente no triviales, como el caso de monopolos [37] e instantones [38][39][40].

  Además de favorecer la compactificación, este mecanismo tiene dos aspectos positivos: (1) las componentes sobrantes del campo de gauge dan campos escalares en 4-d con un potencial unívocamente determinado, y (2) ayuda a subsanar el problema de los fermiones quirales (que detallaremos mas adelante). Por último, las ecuaciones de campo admiten en este caso soluciones de vacío tipo $M^4 \times B^n$, lo que soluciona el problema (2).

- La compactificación de Freund-Rubin [34], propuesta para la supergravedad $N = 1$, $d = 11$, depende del tensor antisimétrico F_{ABCD}. A partir del tensor de energía-impulso de esta teoría se obtiene

$$\bar{c} - c = -8\pi G_{4+n} F^2 \tag{2.65}$$

Sin embargo, la constante cosmológica en $4+n$ dimensiones debe ser nula para que la supersimetría no esté rota; en este caso la ecuación (2.62), implica que $c = 8\pi G_{4+n} F^2$, y entonces el espacio-tiempo 4-d es anti-de Sitter [41].

En el tipo (b), se distinguen las teorías que incorporan a la acción de Einstein-Hilbert $4+n$-dimensional los invariantes R^2, $R_{AB}R^{AB}$, y $R_{ABCD}R^{ABCD}$ [42]. Estas teorías admiten soluciones de vacío $M^4 \times S^n$, y por lo tanto no tiene el problema (2). Sin embargo, presentan el inconveniente de que dan lugar a ecuaciones de campo que tienen derivadas de la métrica de grado 4, lo que hace necesario especificar el valor inicial de la métrica y de sus derivadas hasta el orden 3 para determinar la evolución de la métrica.

Por último, debemos mencionar la compactificación a través de fluctuaciones cuánticas del campo gravitacional en $4+n$ dimensiones: Appelquist y Chodos [43] calcularon las correcciones a un loop (a partir del vacío $\delta_{\mu\nu} \times \phi_c$) al potencial efectivo $V_{ef}(\phi_c)$ de la teoría 5-d (suponiendo que la dimensión extra es compacta). El resultado que obtuvieron puede interpretarse como una densidad volumétrica de energía negativa, que hace que el radio de la dimensión extra se contraiga. Este cálculo es válido hasta que r_5 se hace comparable con la longitud de Planck. El mecanismo fué generalizado por Candelas y Weinberg para el caso de $4+n$ dimensiones [44].

Estabilidad del vacío

Witten [36] mostró que, en el caso 5-d, el vacío $M^4 \times S^1$ es clasicamente estable, pero es inestable frente a un proceso de decaimiento semiclásico. Este hecho está relacionado con que la conjetura de energía positiva [45] no vale para la teoría de Kaluza-Klein. La estabilidad puede asegurarse agregando fermiones elementales [46].

Reducción dimensional y truncamiento consistente

Con el objeto de lograr la reducción dimensional, se hizo la aproximación del modo cero en todos los campos que aparecen en la acción $4+n$ dimensional. Esta aproximación está en principio justificada debido a que los modos con $n \neq 0$ tienen masas muy grandes. Sin embargo, Duff *et al* [47] probaron que el Ansatz obtenido descartando los modos con $n \neq 0$ no satisface en general el criterio de consistencia. El problema desaparece si se incorporan nuevamente los infinitos modos masivos, o se acepta que la simetría de gauge remanente a bajas energías sea menor que la de la variedad. Hay que señalar que este problema no aparece si la variedad interna corresponde a un grupo abeliano (como es el caso del k-toro)

[47].

Una alternativa a la aproximación del modo cero es el método de reducción dimensional por isometría [48][49], que no es mas que una generalización de la idea original de Kaluza. En la teoría original, el espacio-tiempo 5-d tiene un vector de Killing (K_4) tipo espacio en la dirección x^4, y por lo tanto, $\pounds_{K_4} g_{AB} = 0$, lo que implica que ningún campo depende de la coordenada x^4. Para generalizar esta idea, se supone que el espacio-tiempo $4+n$ dimensional admite un grupo de isometrías K generado por n vectores de Killing ξ_a ($a = 1...n$):

$$\pounds_{\xi_a} g_{AB} = 0, \qquad [\xi_a, \xi_b] = f_{ab}^{\ \ c} \xi_c \tag{2.66}$$

y que el espacio n-dimensional generado por los ξ_a es una subvariedad métrica. La condición $\pounds_{\xi_a} g_{AB} = 0$ implica que $\partial_a g_{AB} = 0$, y por lo tanto los campos dependen sólo de x^μ, ($\mu = 1, ..., 3$), pero queda aún la dependencia tensorial con el espacio interno. Proponiendo una métrica de la forma

$$\gamma_{AB}(x^\mu, x^4 ... x^n) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \Phi_{ab} A^a_{\ \mu} A^b_{\ \nu} & A^a_{\ \mu} \Phi_{ab} \\ \Phi_{ab} A^b_{\ \nu} & \Phi_{ab} \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

el escalar de curvatura toma la forma

$$R^{(4+n)} = R^{(n)} + R^{(k)} + \frac{1}{4} \Phi_{ab} F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} + \frac{1}{4} \Phi^{ab} \Phi^{cd} [(D_\mu \Phi_{ac})(D^\mu \Phi_{bd}) - (D_\mu \Phi_{ab})(d^\mu \Phi_{cd})] \tag{2.68}$$

donde $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu + A^b_\mu \partial_b A^a_\nu - A^b_\nu \partial_b A^a_\mu$. Los campos Φ_{ab} se transforman como escalares frente a transformaciones de coordenadas en 4-d, y $R^{(k)} = R^{(k)}(\Phi_{ab})$ es un potencial para los campos escalares, que posibilita la implementación de ruptura de simetría [50]. Es importante notar que el potencial queda unívocamente determinado por las simetrías de la variedad interna.

Este tipo de reducción tiene la ventaja de que es exacta, en el sentido de que no involucra aproximación alguna y por lo tanto evita las inconsistencias de la aproximación del modo cero. Sin embargo, le cabe la misma crítica que al trabajo original de Kaluza: no explica la existencia del grupo de isometrías.

2.3 En búsqueda de una teoría de Kaluza-Klein realista

Con el objetivo de formular una teoría que describa la fenomenología verificada por la observación, es necesario satisfacer varios requisitos. En primer lugar, el modelo standard de las interacciones tiene como grupo de gauge a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Por lo tanto, el grupo de simetría G del espacio compacto B^n debe por lo menos contenerlo como subgrupo. Para ser tan economicos como sea posible, deberíamos adoptar la variedad de menor número de dimensiones que tenga simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Es posible mostrar [51] que este número debe ser mayor o igual que 7. Tal número tiene una importancia particular en Supergravedad, ya que se cree que no es posible formular consistentemente tal teoría en un espacio-tiempo que tenga mas de 7+4 dimensiones [52], debido a la aparición de partículas sin masa de spin mayor que 2, para las cuales no hay una teoría cuántica consistente. Las variedades que tienen al grupo requerido como simetría se denominan M^{pqr} [51]. Es decir que si el vacío de la teoría de Kaluza-Klein es $M^4 \times M^{pqr}$, puede obtenerse a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ como grupo de gauge efectivo, a la manera de Kaluza-Klein.

En segundo lugar, hacen falta quarks y leptones de masa casi nula, que deben estar en la representación apropiada del grupo de gauge, bosones de Higgs que rompan la simetría $SU(2) \times U(1)$, y explicar cómo romper espontaneamente CP, cómo obtener los valores correctos de las constantes de acoplamiento, ángulos de mezcla, y masas a bajas energías, y por último, explicar por qué el vacío de la teoría es el que se necesita para que las ideas de Kaluza-Klein funcionen. De todos estos problemas, el de los fermiones es el mas complejo, y lo expondremos brevemente en lo que sigue.

Para obtener fermiones en 4-d, suponemos que en la teoría $4+n$ dimensional tenemos un fermión de spin 1/2 sin masa, que satisface la ecuación de Dirac en $4+n$ dimensiones:

$$\sum_{i=0}^{4+n} \gamma^i D_i \psi = 0 \tag{2.69}$$

De otra forma,

$$\not{D}^{(4)}\psi + \not{D}^{(\mathrm{int})}\psi = 0 \tag{2.70}$$

Esta ecuación muestra que los autovalores de $\not{D}^{(\mathrm{int})}$ juegan el papel de masas efectivas en 4-d. Ahora bien, $\not{D}^{(\mathrm{int})}$ tiene un espectro discreto (por actuar sobre una variedad compacta), y sus autovalores son no nulos [53], y del orden de l_{Planck}^{-1}. Si hubiésemos considerado fermiones masivos en $4+n$ dimensiones, para que el término de masa original cancele al que viene del operador de Dirac se requeriría de un *fine tunning* de 10^{-19} en la masa original. Si se piensa en Supergravedad, el operador de Rarita-Schwinger tiene modos cero que podrían estar asociados entonces a quarks y leptones, pero adolece de un problema aun mas grave (que también se presenta en el operador de Dirac): trata de igual manera a fermiones 4-d izquierdos y derechos, mientras que en la naturaleza esto no ocurre. Este problema podría tener solución si se agregan campos de gauge con una configuración no trivial en $4+n$ dimensiones [54].

Como se aprecia de lo expuesto en este capítulo, la teoría de Kaluza-Klein en su forma original sufre de diversos problemas, y es inconsistente a la hora de dar cuenta de la fenomenología a bajas energías. La mayor parte de estos problemas tiene solución al incorporar campos de materia a la acción original. Sin embargo, estos campos hacen que la idea misma de la teoría no sea respetada; peor aún, no hay ningún principio fundamental que limite el contenido de materia. La situación mejora notablemente si la idea de obtener bosones con una simetría dada a partir de la simetría de la variedad interna se une a la

Supergravedad. En esta última, el contenido de materia (que está dictaminado por la supersimetría) resuelve los problemas de la teoría de Kaluza-Klein "pura".

Capítulo 3

WORMHOLES

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General son de carácter local; por lo tanto, admiten soluciones con topología no trivial. Entre éstas, los *wormholes* han sido extensamente estudiados. Su característica principal es que un *embedding* de una cualquiera de sus secciones a $t=$ constante en un espacio euclídeo exhibe dos universos asintóticamente planos unidos por una garganta [56].

El primer trabajo en relación a las soluciones de las ecuaciones de Einstein que actualmente se conocen como *wormholes* se debe a Einstein y Rosen (ER) [57]. La motivación de este trabajo era construir un modelo geométrico finito y sin singularidades de una partícula elemental. El modelo resultante no era correcto, pero *"... involucra la representación matemática del espacio físico por medio de un espacio compuesto por dos hojas idénticas, siendo la partícula representada por un "puente" que conecta dichas hojas"* (ER). Veamos esto en detalle. La métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{3.1}$$

Recordemos que esta métrica sólo cubre la mitad de la máxima extensión analítica posible (es decir, sólo una región asintóticamente plana con una singularidad) como fué mostrado por Kruskal [58].

Siguiendo a ER, si hacemos el cambio de coordenadas $u^2 = r - 2M$, la métrica queda

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2 \tag{3.2}$$

con $u \in (-\infty, \infty)$ para $r \notin [0, 2M)$. Es decir que la coordenada u cubre dos veces la región asintóticamente plana $[2M, \infty)$. La región cercana a $u = 0$ puede ser interpretada como un "puente" que conecta las dos regiones asintoticamente planas. Para justificar tal nombre, consideremos una superficie con u =constante; el área de dicha superficie es $A(u) = 4\pi(2M + u^2)^2$, y el área mínima es $A(0) = 4\pi(2M)^2$. Esta superficie de área mínima se denomina garganta, y la región cercana es el puente mencionado antes (o *wormhole*, en lenguaje moderno).

Hay que notar que esta construcción no es posible si $M < 0$ (en este caso la solución tiene una singularidad desnuda), es decir en ausencia de horizonte, y que en realidad, este sistema no es más que el agujero negro de Schwarzschild visto desde otro sistema coordenado, que no cubre totalmente al espacio-tiempo .

Einstein y Rosen también discutieron el caso de la geometría de Reissner-Nordstrom [59][60]. La construcción que realizaron en este caso y en el de Schwarzschild puede generalizarse como sigue. La métrica más general posible de una geometría con simetría esférica y con un horizonte puede escribirse [61]

$$ds^2 = -e^{-\phi(r)}\left[1 - \frac{b(r)}{r}\right]dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{3.3}$$

El horizonte está en $r = r_H$, definido por la relación $b(r_H) = r_H$. Introduciendo la coordenada $u^2 = r - r_h$, y aproximando para u pequeños,

$$ds^2 \approx -e^{-\phi(r_H)}\frac{u^2[1 - b'(r_H)]}{r_H}dt^2 + \frac{r_H + u^2}{1 - b'(r_H)}du^2 + (r_H + u)^2 d\Omega^2 \tag{3.4}$$

que tiene la forma de la métrica (3.2). Algo similar ocurre en el límite $u \to \pm\infty$. Por lo tanto, cualquier geometría con simetría esférica que contenga un horizonte describe, cambio de coordenadas mediante, un puente de Einstein-Rosen. Debe señalarse sin embargo que este artificio matemático no implica que la singularidad en $r = 0$ haya desaparecido; esto es, las geodésicas de esta geometría continúan en la región $r < 2M$ y terminan inevitablemente en la singularidad.

Después del trabajo de Einstein y Rosen, los *wormholes* cayeron en el olvido hasta 1955, año en que J. Wheeler introdujo el concepto de *geon* [62] para modelar una carga no nula con una densidad de carga nula en todo punto por medio de un espacio-tiempo múltiplemente conexo [1]. En el año 1963, Kerr [64] encontró una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein que corresponde a un agujero negro en rotación de masa M y momento angular L. Esta geometría puede generalizarse al caso de un agujero negro que además tiene carga; la solución correspondiente es la de Kerr-Newman [65]. En ambos casos es posible realizar una construcción similar a la hecha para la métrica de Schwarzschild [67].

El siguiente hito en el desarrollo de estas ideas fué el trabajo de Morris y Thorne (MT) [56], publicado en 1988. Para comprender en qué sentido fué novedoso, es conveniente recordar que la característica mas saliente de los *wormholes* que vimos hasta aquí es que todos ellos tienen al menos un horizonte, que oculta una singularidad (central en los casos de Schwarzschild y Reissner-Nordstrom, y en forma de anillo en los casos de Kerr y

[1] En un trabajo posterior, Misner y Wheeler utilizaron por primera vez la palabra *wormhole* para designar a una "manija" de un espacio-tiempo multiplemente conexo [63].

Kerr-Newman [2]. MT buscaron entonces soluciones tipo *wormhole* que no tuvieran singularidades. Debido a que no fué posible encontrar soluciones con esa característica utilizando tensores de energía-impulso conocidos, MT redujeron la arbitrariedad de la métrica mediante hipótesis razonables, adoptaron un tensor de energía-impulso consistente con las simetrías de dicha solución, y a través de las ecuaciones de Einstein dedujeron las condiciones que deben satisfacer las funciones que aparecen en el tensor de energía-impulso. El paso final consistió en decidir si la distribución de energía-impulso obtenida es físicamente razonable.

Antes de pasar a la sección siguiente, conviene señalar que hay distintos tipos de *wormholes* , clasificables en dos grupos: lorentzianos y euclideanos, de acuerdo al tipo de variedad en el que residen [3]. Dentro de la clase lorentziana están los permanentes y los transitorios, cada uno de los cuales puede ser intra-universo ó inter-universo, además de microscópico ó macroscópico [67]. Cabe señalar que los *wormholes* transitorios involucran un cambio de topología del espacio-tiempo a nivel clásico, hecho que está prohibido por teorema dentro de la Relatividad General para los espacio-tiempo bien comportados causalmente (es decir, aquellos que no tienen cuavas temporales cerradas) [68].

3.1 Soluciones tipo *wormhole* en Relatividad General

En esta sección haremos una revisión del trabajo de MT, restringiéndonos al caso de *wormholes* del tipo interuniverso. Las hipótesis relevantes hechas en este trabajo son:

- La métrica tiene simetría esférica, es estática, y la materia que genera esta geometría no está en rotación.
- La Relatividad General es la teoría de la gravitación.
- La solución debe tener una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
- La solución debe estar libre de singularidades.

(de hecho, MT hacen otras cuatro hipótesis que tienen que ver con un tipo aun mas especial de solución: el *wormhole* atravesable [56]). La primera hipótesis (hecha con el objeto de simplificar los cálculos) implica que el intervalo tiene la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)d\Omega^2 \tag{3.5}$$

donde l es la distancia radial propia y cubre el rango $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, éste no es el sistema de coordenadas más conveniente desde el punto de vista de cálculo; conviene pasar

[2] En estos últimos, para ciertos valores de M, L y Q es posible obtener *wormholes* que tienen una singularidad desnuda

[3] Los *wormholes* euclídeos tienen importancia en la formulación de la gravedad cuántica utilizando integración funcional [66].

a coordenadas de Schwarszchild (t, r, θ, ϕ). Para cubrir la variedad asociada a este espacio-tiempo son necesarias dos cartas coordenadas de Schwarszchild (una por cada universo, es decir, por cada intervalo (r_0, ∞)), que se unen en r_0.En estas coordenadas, el intervalo es

$$ds^2 = -e^{2\Phi_\pm} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b_\pm}{r}} + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) \tag{3.6}$$

Tanto Φ ("función de redshift") como b ("función de forma") son funciones de la coordenada r. Los signos $+$ y $-$ designan a las funciones en cada una de las regiones $[r_0, \infty)$, donde r_0 está definido a través de $b_\pm(r_0) = r_0$, y es el radio de la garganta. Es conveniente introducir la distancia radial propia

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b_\pm(r')}{r'}}} \tag{3.7}$$

En términos de l, la garganta está definida como el mínimo de $r(l)$.

Para que la geometría espacio-tiempo tienda asintóticamente al espacio-tiempo plano deben cumplirse las condiciones

$$\lim_{r\to\infty} b_\pm(r) = b_\pm \qquad \lim_{r\to\infty} \Phi_\pm(r) = \Phi_\pm \tag{3.8}$$

con $b_\pm$ y $\Phi_\pm$ finitos. El requisito de ausencia de horizonte implica que $\Phi_\pm(r)$ debe ser finita para todo r, ya que un horizonte es toda superficie no singular sobre la cual $g_{00} = 0$.

A partir de la métrica (3.6) pueden calcularse de la manera usual (en un sistema de coordenadas conveniente) los tensores de Riemann y Einstein [56]. Las componentes no nulas de este último son

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2} \tag{3.9}$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + \frac{2(1-\frac{b}{r})}{r}\Phi' \tag{3.10}$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left[\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right] \tag{3.11}$$

Como consecuencia del teorema de Birkhoff [71] es necesario que el tensor de energía-impulso sea no nulo (de otro modo la única solución posible es la de Schwarzschild). Dicho tensor debe tener la misma estructura algebraica que $G_{\mu\nu}$, esto es

$$T_{tt} = \rho(r) \qquad T_{rr} = -\tau(r) \qquad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p(r) \tag{3.12}$$

La razón para introducir una tensión radial en lugar de una presión es que una tensión distinta de cero evita que las geodésicas converjan a un punto (esto es, a una singularidad).

Las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.13}$$

tienen la forma

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G r^2} \tag{3.14}$$

$$\tau = \frac{1}{8\pi G}\left[\frac{b}{r^3} - 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r}\right] \tag{3.15}$$

$$p = \frac{1}{8\pi G}\left\{\left(1 - \frac{b}{r}\right)\left[\Phi'' + \Phi'\left(\Phi' + \frac{1}{r}\right)\right] - \frac{1}{2r^2}(b'r - b)\left(\Phi' + \frac{1}{r}\right)\right\} \tag{3.16}$$

(se han obviado los subíndices $+$ y $-$). En este sistema de tres ecuaciones hay 5 incógnitas. El método usual de resolución supondría la adopción de dos ecuaciones de estado, que liguen a las cantidades que aparecen en el tensor de energía-impulso, y hagan soluble al sistema. Como veremos a continuación, es posible deducir algunas propiedades interesantes de la solución a partir de las ecuaciones de movimiento.

La ecuación (3.7) implica que $\frac{dr}{dl} = \pm\sqrt{1 - \frac{b_\pm}{r}}$. A partir de esta ecuación es posible deducir que en la garganta

$$\left.\frac{d^2r}{dl^2}\right|_{r_0} = \frac{1}{2r_0}[1 - b'_+(r_0)] = \frac{1}{2r_0}[1 - b'_-(r_0)]$$

y por lo tanto, $b'_+(r_0) = b'_-(r_0)$. Además, $\left.\frac{d^2r}{dl^2}\right|_{r_0} \geq 0$ (por definición de garganta), y entonces $b'_\pm(r_0) \leq 1$.

En forma similar, a partir de la relación

$$\frac{d\Phi}{dl} = \frac{d\Phi}{dr}\frac{dr}{dl} = \sqrt{1 - \frac{b}{r}}\,\Phi'$$

es posible deducir la relación $\Phi'_+(r_0) = \Phi'_-(r_0)$. La continuidad de $b'(r)$ y $\Phi'(r)$ en r_0 garantiza la continuidad de los tensores de Riemann y Einstein en r_0. La expresión de este último en la garganta es

$$\left.G_{tt}\right|_{r_0} = \frac{b'(r_0)}{r_0^2} \tag{3.17}$$

$$\left.G_{rr}\right|_{r_0} = -\frac{1}{r_0^2} \tag{3.18}$$

$$\left.G_{\theta\theta}\right|_{r_0} = \left.G_{\phi\phi}\right|_{r_0} = \frac{1 - b'(r_0)}{2r_0}\left[\Phi'(r_0) + \frac{1}{r_0}\right] \tag{3.19}$$

Evaluando las ecuaciones (3.14)-(3.16) en la garganta obtenemos

$$\rho|_{r_0} = \frac{b'(r_0)}{8\pi G r_0^2} \tag{3.20}$$

$$\tau|_{r_0} = \frac{1}{8\pi G r_0^2} \tag{3.21}$$

$$p|_{r_0} = \frac{1-b'(r_0)}{16\pi G r_0}\left[\Phi'(r_0)+\frac{1}{r_0}\right] \tag{3.22}$$

De las ecuaciones (3.14) y (3.15),

$$8\pi G(\rho-\tau) = -\frac{e^{2\Phi}}{r}\left[e^{-2\Phi}\left(1-\frac{b}{r}\right)\right]' \tag{3.23}$$

Puede mostrarse que existe algún r_* tal que $\forall r \in (r_0, r_*)$,

$$\left[e^{-2\Phi}\left(1-\frac{b}{r}\right)\right]' > 0 \tag{3.24}$$

(en principio r_* podría ser $+\infty$) y entonces $\forall r \in (r_0, r_*)$,

$$\rho(r) - \tau(r) < 0 \tag{3.25}$$

En la garganta en cambio

$$\rho(r_0) - \tau(r_0) \leq 0 \tag{3.26}$$

(la materia que satisface esta desigualdad se conoce como "materia exótica")

Para ver una de las consecuencias de esta desigualdad pasemos a un sistema de referencia que se mueve con un factor de Lorentz γ en dirección radial cerca de la garganta. En dicho sistema, la densidad de energía está dada por

$$T_{0'0'} = \gamma^2(\rho_0 - \tau_0) + \tau_0 \tag{3.27}$$

Por lo tanto, si γ es lo suficientemente grande, la densidad de energía será negativa. Es posible mostrar que esto ocurre aún en el caso de *wormholes* no esféricos y no estáticos [56].

3.2 Condiciones de energía

La desigualdad (3.26) aparece en el contexto general de las condiciones de energía. A continuación damos las definiciones pertinentes, suponiendo que el tensor de energía-impulso es $T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$.

1. Condición de energía nula (CEN)
   CEN $\Leftrightarrow T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho + p_j \geq 0$, $(j = 1,2,3)$, para cualquier k^μ tipo luz.

2. Condición de energía débil (CEd)
CEd $\Leftrightarrow T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq 0$ y $\rho + p_j \geq 0$, $(j = 1,2,3)$, para cualquier v^μ tipo tiempo.
CEd implica CEN por continuidad. Además obliga a que la densidad local de energía sea no negativa para todo sistema de referencia.

3. Condición de energía fuerte (CEF)
CEF $\Leftrightarrow \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right) v^\mu v^\nu \geq 0 \Leftrightarrow \rho + p_j \geq 0$ y $\rho + \sum_j p_j \geq 0$, $(j = 1,2,3)$, para cualquier v^μ tipo tiempo.
CEF implica CEN por continuidad ($T = 0$ para partículas sin masa).

4. Condición de energía dominante (CED)
CED $\Leftrightarrow T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ y $T_{\mu\nu}v^\mu$ no es tipo espacio $\Leftrightarrow \rho \geq 0$ y $p_j \in [-\rho, \rho]$, $(j = 1,2,3)$ para cualquier v^μ tipo tiempo.
Es decir que CED implica que la densidad local de energía es siempre positiva, y que el flujo de energía es tipo tiempo o tipo luz. CED implica CEd (y por lo tanto CEN), pero no CEF.

Como vimos en la sección anterior, en un espacio-tiempo con características de *wormhole* debe existir un r_* tal que $\forall r \in (r_0, r_*)$, $\rho - \tau < 0$. En la garganta, $\rho(r_0) - \tau(r_0) \leq 0$. Por lo tanto, la materia que genera el *wormhole* viola CEN en (r_0, r_*), lo que implica que también viola CEd, CEF, y CED allí. En la garganta, de valer la igualdad podría satisfacerse CEN.

La ecuación (3.27) muestra que si no se cumple CEN en o cerca de la garganta, la densidad de energía será negativa en sistemas de referencia locales con γ lo suficientemante grande. Por otra parte, debido a la geometría que estamos exigiendo para el *wormhole* , el comportamiento de la sección transversal (σ) de un haz de geodésicas nulas al atravesar un *wormhole* debe cambiar al pasar por la garganta: σ es decreciente si la velocidad es en la dirección en que r decrece, y es creciente en la dirección contraria. Esta conversión de decreciente a creciente sólo puede ser causada por la repulsión gravitacional de la materia a través de la cual pasan las geodésicas, y tal repulsión sólo es posible para densidades negativas [4].

¿Qué tipo de materia no cumple con alguna de las condiciones de energía? Veamos algunos ejemplos:

- Campo escalar masivo
El tensor de energía-impulso de un campo escalar masivo es
$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[(\nabla\Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right] \tag{3.28}$$
y su traza es $T = -(\nabla\Phi)^2 - 2m^2\Phi^2$. Para cualquier vector tipo tiempo, CEF aplicada a (3.28) es $[v.\nabla\Phi]^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$. Para violar CEF basta entonces hacer nulo el término

[4] Este argumento puede ser formalizado a través de la ecuación de Raychaudhuri [67], que describe la expansión, el esfuerzo de corte y la torsión de una congruencia de geodésicas en el espacio-tiempo [30].

($v.\nabla\Phi^2$). Esto es posible por ejemplo si tomamos un Φ independiente del tiempo en el sistema en el que $v = (1, 0, 0, 0)$. Puede mostrarse además que Φ satisface el resto de las condiciones de energía.

- Efecto Casimir
  El efecto Casimir es producido por la distorsión de la energía de punto cero del vacío electrodinámico causada por la imposición de condiciones de contorno no triviales (por ejemplo, por la presencia de un conductor). El cálculo original de Casimir [72] trató el caso de dos placas conductoras paralelas separadas por una distancia a. Si las placas están en planos z =constante, es posible mostrar que el tensor de energía-impulso asociado a los modos de campo electromagnético entre las placas es

$$T_{\mu\nu} = \frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar}{a^2}\left(\eta_{\mu\nu} - 4\hat{z}^\mu\hat{z}^\nu\right) \tag{3.29}$$

  Como $\rho < 0$, automáticamente se violan CEd y CED. Además se viola CEN a causa de $\rho + p_z < 0$, y por lo tanto CEF.

  A diferencia del campo escalar, en este caso la violación de las condiciones de energía tiene un origen puramente cuántico. Debemos señalar además que el efecto es sumamente pequeño, y que un modelo realista que intentase tener como fuente de las ecuaciones de Einstein a este sistema debería incorporar la masa de las placas conductoras (que es mayor que la energía de Casimir).

- Otros sistemas cuánticos que violan una o varias de las condiciones de energía son: el estado de vacío "squeezed" [56], la evaporación de agujeros negros a través de la radiación de Hawking [73], y el campo escalar masivo libre [74]

Es claro entonces que efectos cuánticos conducen en algunos casos a violaciones de las condiciones de energía. Sin embargo, no hay un criterio general para decidir bajo qué circunstancias se producen estas violaciones. Además todos estos efectos son típicamente pequeños (esto es, $O(\hbar)$), y no está claro si es posible generar efectos más importantes.

Por lo dicho hasta aquí, la existencia de *wormholes* no tiene sustento sólido, debido a las propiedades singulares que debe tener la materia que genera este tipo de solución. De hecho, si no fuese por la violación de las condiciones de energía que ocurre, bajo ciertas condiciones, a nivel cuántico, el trabajo de MT implicaría que las soluciones de *wormhole* de la Relatividad General no tienen correlato en la naturaleza. Cabe señalar sin embargo que no existe prueba alguna de que las leyes de la física prohiban acumulaciones macroscópicas de "materia exótica". Por otra parte debemos recordar que la Relatividad General no es la única teoría viable de la gravitación. En la sección siguiente veremos que las soluciones de *wormhole* son posibles en la teoría de Brans-Dicke con materia normal.

3.3 *Wormholes* en la teoría de Brans-Dicke

Las soluciones de *wormhole* se han discutido en diversas teorías alternativas de de la gravitación, como la teoría no simétrica de Moffat [76], la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet [77], en teorías con acción $R + R^2$ [75], y en la teoría de Brans-Dicke [78]. Esta última es particularmente relevante ya que al día de hoy está en excelente acuerdo con la observación (ver Apéndice).

Agnese y La Camera [78] encontraron soluciones de *wormhole* estáticas y con simetría esférica en la teoría de Brans-Dicke, con el campo escalar de la teoría como fuente de las ecuaciones de Einstein. La característica más saliente de estas soluciones es que el campo Φ puede desempeñar el rol de materia exótica si $\omega < -2$. Esto significa en particular que $\rho_\Phi < 0$. A continuación veremos que es posible tener soluciones de *wormhole* en la teoría de Brans-Dicke con materia normal; el campo Φ sigue siendo el responsable de la violación de CEd [5].

Siguiendo las convenciones de [81], las ecuaciones de campo de Brans-Dicke son

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}\left(T_{\mu\nu} - \frac{\omega+1}{2\omega+3} T\, g_{\mu\nu}\right) + \omega\, \frac{\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}}{\Phi^2} + \frac{\Phi_{;\mu;\nu}}{\Phi} \tag{3.30}$$

$$\Phi^{;\mu}_{\ ;\mu} = \frac{8\pi}{2\omega+3} T \tag{3.31}$$

La suposición de que el espacio-tiempo es estático implica que es posible elegir la métrica y el campo escalar Φ tales que satisfagan

$$g_{\mu\nu,t} = 0 \qquad \Phi_{,t} = 0 \qquad g_{ti} = 0 \tag{3.32}$$

($i = r, \theta, \phi$). Imponiendo además simetría esférica, el elemento de línea puede ser escrito en la forma de Schwarszchild:

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.33}$$

Para el tensor de energía-impulso de la materia adoptamos la forma dada en (3.12):

$$T^t_{\ t} = -\rho(r) \qquad T^r_{\ r} = -\tau(r) \qquad T^\theta_{\ \theta} = T^\phi_{\ \phi} = p(r) \tag{3.34}$$

y cero en todo otro caso. Finalmente suponemos que la materia obedece la siguiente ecuación de estado:

$$-\tau + 2p = \epsilon\rho \tag{3.35}$$

donde ϵ es una constante. La traza del tensor de energía-impulso es $T = -\tau + 2p - \rho = \rho(\epsilon - 1)$.

[5] Este resultado se encuentra en el artículo "Brans-Dicke *wormholes* in non-vacuum spacetime", L. Anchordoqui, S. Perez Bergliaffa y D. Torres, aceptado para su publicación en Phys. Rev. D de abril de 1997.

Las ecuaciones de campo toman la forma

$$-\psi'' - (\psi')^2 + \lambda'\psi' + 2\frac{\lambda'}{r} = -\frac{8\pi}{\Phi}\left[\tau + \frac{\omega+1}{2\omega+3}T\right]e^{2\lambda} + (\omega+1)(\ln\Phi)'^2 + (\ln\Phi)'' - \lambda'(\ln\Phi)' \tag{3.36}$$

$$1 - re^{-2\lambda}\left[\psi' - \lambda' + \frac{1}{r}\right] = \frac{8\pi}{\Phi}\left[p - \frac{\omega+1}{2\omega+3}T\right]r^2 + re^{-2\lambda}(\ln\Phi)' \tag{3.37}$$

$$e^{2(\psi-\lambda)}\left[\psi'' + (\psi')^2 - \lambda'\psi' + 2\frac{\psi'}{r}\right] = \frac{8\pi}{\Phi}\left[\rho + \frac{\omega+1}{2\omega+3}T\right]e^{2\psi} - \psi' e^{2(\psi-\lambda)}(\ln\Phi)' \tag{3.38}$$

$$\Phi'' - \Phi'\left(\lambda' - \psi' - \frac{2}{r}\right) = \frac{8\pi}{2\omega+3}T\,e^{2\lambda} \tag{3.39}$$

Para resolver el sistema compuesto por las ecuaciones (3.36)-(3.39) seguiremos el método esbozado en [82]. Buscaremos una ecuación diferencial que relacione ψ y λ, a partir de las ecuaciones de movimiento y de la ecuación de estado. Dicha ecuación será de segundo orden y no lineal en ψ, pero, después de un cambio de variables, lograremos transformarla en una de primer orden y lineal en λ. Haremos entonces una elección específica para ψ, consistente con el límite plano en infinito espacial, y la ausencia de horizontes y singularidades. Finalmente substituiremos esta expresión de ψ en la ecuación lineal, y resolveremos para λ.

Como se explica en [81], de las equaciones (3.35), (3.38) y (3.39), puede mostrarse que $\Phi = \Phi_0\, e^{c\psi}$ donde $c = (\epsilon-1)/[2\omega+3+(\omega+1)(\epsilon-1)]$, y Φ_0 está relacionado con el valor de la constante de acoplamiento gravitacional cuando $r \to \infty$. En el caso $\omega \to \infty$ ó $\epsilon \to 1$, recuperamos a la Relatividad General (aunque en el último caso, otras soluciones distintas de $\Phi =$ constante pueden existir).

Después de un poco de álgebra, obtenemos la siguiente ecuación:

$$A\,\psi'' + B\,(\psi')^2 + 2A\,\psi' - A\,\lambda'\psi' + \frac{2}{r^2}\,(e^{2\lambda}-1) = 0 \tag{3.40}$$

donde

$$A = -2\,\frac{2+\epsilon+2\omega}{2+\epsilon+\omega(1+\epsilon)}$$

$$B = -\frac{8+\epsilon^2(\omega+2)+4\omega^2(1+\epsilon)+8\epsilon+11\omega+12\omega\epsilon}{[2+\epsilon+\omega(\epsilon+1)]^2}$$

Hacemos ahora el *Ansatz* $\psi = -\frac{\alpha}{r}$, donde α es una constante positiva. Con esta elección, que garantiza que la "constante gravitacional" tome el valor correcto en $r \to \infty$, la ecuación (3.40) se escribe

$$h(r) + f(r)\,e^{2\lambda} + g(r)\,\lambda' = 0 \tag{3.41}$$

donde

$$h(r) = B\left(\frac{\alpha}{r^2}\right)^2 - \frac{2}{r^2} \qquad f(r) = \frac{2}{r^2} \qquad g(r) = -\frac{A\alpha}{r^2} + \frac{4}{r}$$

Cambios de variables convenientes transforman a la ecuación (3.41) en una ecuación de Bernoulli, y luego en una ecuación lineal. La solución general está dada por

$$e^{-2\lambda} = \frac{e^{2s/\varphi}}{\varphi}\left(1+\frac{R}{\varphi}\right)^{-(8l+1)}\{I+\mathcal{K}\} \tag{3.42}$$

donde

$$\varphi = \frac{r}{\alpha} \qquad s = \frac{B}{A} \qquad R = -\frac{A}{4} \qquad l = -\frac{B}{A^2}$$

$$I \equiv \int e^{-2s/\varphi}\left(1+\frac{R}{\varphi}\right)^{8l} d\varphi$$

y $\mathcal{K}$ es una constante. Esta solución no es válida cuando $A \to 0$, esto es para $\omega = -1-\epsilon/2$.

El binomio $(1+R/\varphi)^{8l}$ está relacionado con la función hipergeométrica ${}_2F_1$ [83]. Usando la relación [83]

$$e^t\,{}_pF_q(\alpha_1,\ldots\alpha_p;\beta_1\ldots\beta_q;-xt) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{p+1}F_q(-n,\alpha_1,\ldots\alpha_p;\beta_1,\ldots\beta_q;x)\frac{t^n}{n!}\,, \tag{3.43}$$

la integral I puede ser escrita

$$I = 2s\sum_{n=0}^{\infty}\int {}_3F_1(-n,-8l,b;b;R/2s)\left(\frac{-2s}{\varphi}\right)^n \tag{3.44}$$

Integrando los términos correspondientes a $n=0$ y $n=1$, obtenemos finalmente

$$I = \varphi - 8\,l\,R\,\ln\varphi + \varphi\sum_{n=2}^{\infty} {}_3F_1(-n,8l,b;b;R/2s)(-1)^n\left(\frac{2s}{\varphi}\right)^n\frac{1}{n!\,(n-1)} \tag{3.45}$$

Puede verse fácilmente que $e^{2\lambda} \to 1$ cuando $\varphi \to \infty$.

Para fijar la constante $\mathcal{K}$, debemos elegir un valor para el radio adimensional (φ_g) tal que la condición de *"flaring out"*:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_g^+} e^{-2\lambda} = 0^+ \tag{3.46}$$

sea respetada. En el caso $R \leq 0$, φ_g debe necesariamente ser mayor que $|R|$, para que la condición de *flaring out* valga para todos los valores de ω y ϵ, excepto obviamente aquellos para los cuales R diverge, que están dados por $\omega = -(2+\epsilon)/(1+\epsilon)$. Sin embargo, el tamaño absoluto de la garganta también depende de α [6]. Las propiedades antes mencionadas de λ junto con la definición de ψ permiten mostrar que el tensor métrico describe

[6] Esta situación es análoga a la que encontraron Kar and Sahdev para *wormholes* en Relatividad General [82].

dos espacio-tiempos asintóticamente planos unidos por una garganta.

Analicemos ahora que ocurre con las condiciones de energía. Usando las ecuaciones de campo y la expresión de la traza, obtenemos facilmente

$$\frac{2e^{2\lambda}}{r^2} - \frac{4\psi'}{r} - \frac{2}{r^2} = \frac{16\pi}{\Phi}\tau e^{2\lambda} + \frac{4}{r}\frac{\Phi'}{\Phi} - \omega\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 + 2\frac{\Phi'}{\Phi}\psi' \tag{3.47}$$

En la garganta, $e^{2\lambda} \to \infty$, y entonces

$$\tau_g \approx \frac{\Phi_g}{8\pi r_g^2} \tag{3.48}$$

Para calcular ρ_g, usamos las componentes no triviales de la ecuación $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$:

$$\tau' = \psi'(\rho - \tau) - \frac{2\tau}{r} - \frac{\epsilon\rho + \tau}{r} \tag{3.49}$$

Usando las ecuaciones (3.48), (3.49), y la derivada de la ecuación (3.47),

$$\rho_g \approx \tau_g \frac{c + 1 + \varphi_g}{1 - \epsilon\varphi_g} \tag{3.50}$$

Finalmente, de la ecuación (3.35),

$$p_g \approx \frac{\tau_g}{2}\frac{\epsilon(c+1)+1}{1 - \epsilon\varphi_g} \tag{3.51}$$

Mostraremos ahora que la CEd puede ser violada (al menos cerca de la garganta) con materia no exótica. Esto significa que daremos el rango de parámetros para los cuales existe una solución de *wormhole* y a la vez el contenido de materia de la teoría satisface las desigualdades

$$\rho_g \geq 0 \qquad \rho_g - \tau_g \geq 0 \qquad \rho_g + p_g \geq 0 \tag{3.52}$$

o equivalentemente

$$\frac{c + 1 + \varphi_g}{1 - \epsilon\varphi_g} \geq 1 \tag{3.53}$$

$$\frac{\epsilon(c+1) + 3 + 2(c + \varphi_g)}{1 - \epsilon\varphi_g} \geq 0 \tag{3.54}$$

Una condición necesaria para la violación en la garganta de la CEd en el caso de materia mas campo de Brans-Dicke está dada por

$$\frac{2(\omega+1)+\epsilon}{2\omega+3}\rho_g \leq 0 \tag{3.55}$$

(esta ecuación sale de $\rho_\Phi + \rho_{mat} \leq 0$). Como ejemplo, estudiemos el caso $\epsilon = 2$. De las ecuaciones (3.48), (3.50), y (3.51), las desigualdades (3.52) serán satisfechas si

$$\left(\varphi_g \geq -\frac{1}{9\omega + 12} \text{ y } \varphi_g < \frac{1}{2}\right) \quad \text{ó} \quad \left(\varphi_g \leq -\frac{1}{9\omega + 12} \text{ y } \varphi_g > \frac{1}{2}\right) \tag{3.56}$$

La desigualdad (3.55) se cumplirá para $\omega \in (-2, -3/2)$. Finalmente tenemos que imponer que $\varphi_g \geq |A/4|$, lo que implica que

$$\varphi_g \geq \left|\frac{2+\omega}{4+3\omega}\right| \tag{3.57}$$

Es decir que un *wormhole* no exótico podría existir en el caso de $\omega \in (-2, -3/2)$, con un φ_g dado por (3.57). Debemos recordar que un intervalo definido para φ_g no determina el radio de la garganta, a causa de la dependencia de φ con α.

Para concluir, hemos mostrado que la teoría de Brans-Dicke en presencia de materia que obedece una ecuación de estado general admite soluciones analíticas de *wormhole*. Estas generalizan las soluciones de vacío obtenidas por Agnese y La Camera [78], con la particularidad de que existen algunas regiones del espacio de parámetros en las que el campo de Brans-Dicke puede desempeñar el papel de materia exótica, y por lo tanto sería posible construir un espacio-tiempo tipo *wormhole* con materia ordinaria, a diferencia de lo que ocurre en Relatividad General .

Capítulo 4

COSMOLOGIA

4.1 Cosmología Standard

La Relatividad General describe al espacio-tiempo como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones sobre la cual está definida una métrica de signatura lorentziana; dicha métrica está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo a través de las ecuaciones de Einstein, $G_{AB} = 8\,\pi\, G\, T_{AB}$. Cabe preguntarse cual es la solución de estas ecuaciones que describe al espacio-tiempo que observamos. Para responder a esta pregunta hay que recurrir a los datos observacionales disponibles y a una serie de hipótesis acerca de las propiedades del universo, basadas en nuestros prejuicios filosóficos. A partir de Copérnico, se ha supuesto que la situación de nuestro planeta en el universo no es privilegiada; esto es, si estuviésemos situados en otra región del universo, las características de ésta (tales como la distribución de materia o la distribución de radiofuentes) serían esencialmente las mismas que en nuestra región. También es natural suponer que el universo es isotrópico, esto es, que no hay direcciones privilegiadas en el espacio. Estas hipótesis (de homogeneidad e isotropía, respectivamente) se han visto confirmadas por la observación hasta escalas de 10^8 años luz (es decir, algo mayores que el tamaño típico de los cúmulos de galaxias). Mas precisamente, de acuerdo con el *redshift survey* de Shectman *et al* [87] (que alcanzó una profundidad de 800 Mpc) no hay evidencia de estructura en escalas mayores que 100 Mpc. Otra evidencia a favor de la hipótesis de homogeneidad es el fondo cósmico de radiación, del cual hablaremos más adelante.

Daremos a continuación una formulación matemática precisa de las nociones de homogeneidad e isotropía. Se dice que un espacio-tiempo M es espacialmente *homogéneo* si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies tipo espacio Σ_t que "folian" a M, tal que para cada t y para puntos $p, q \in \Sigma_t$ cualesquiera, existe una isometría de la métrica de M que lleva a p hasta q [1].

Se dice que un espacio-tiempo M es espacialmente isotrópico en cada punto si existe

[1] El parámetro t es el análogo del tiempo en las teorías anteriores a la Relatividad General .

una congruencia de curvas tipo tiempo que cubren a M, y que satisfacen la siguiente propiedad: dados un punto p y dos vectores unitarios s_1^a y s_2^a ortogonales al tangente u^a a la curva, existe una isometría de g_{ab} que deja a p y $u^a(p)$ fijos, pero rota s_1^a en s_2^a. Es decir que en un universo isotrópico no existen direcciones privilegiadas ortogonales a u^a.

La métrica g_{ab} induce sobre Σ_t una métrica riemaniana $h_{ab}(t)$. Al considerar la evolución temporal de la separación entre dos líneas de universo cualesquiera se concluye que la dependencia temporal de la métrica del 3-espacio debe estar dada por el factor de expansión $a(t)$ [69]:

$$d\sigma^2 = a^2(t) h_{ab} dx^a dx^b \tag{4.1}$$

Con h_{ab} puede construirse el tensor ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$. Es posible mostrar que las hipótesis de homogeneidad e isotropía conducen a la relación [30]

$$^{(3)}R_{abcd} = K\, h_{c[a} h_{b]d} \tag{4.2}$$

donde K es una constante. Los espacios para los que se cumple la relación (4.2) se llaman espacios de curvatura constante. Puede mostrarse [70] que cualesquiera dos espacios de curvatura constante, de la misma dimensión y signatura, con igual valor de K, son localmente isométricos. Por lo tanto, para determinar la geometría de Σ_t hace falta encontrar la expresión de h_{ab} para un valor arbitrario de K.

Calculando ${}^{(3)}R_{abcd}$ con la métrica definida como sigue

$$h_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{(1 + \frac{1}{4} K \delta_{ij} x^i x^j)^2} \tag{4.3}$$

se satisface la ec.(4.2). Por medio de cambios de coordenadas convenientes [69], el intervalo en el 3-espacio puede escribirse

$$d\sigma^2 = a^2(t) \begin{cases} K^{-1}[d\psi^2 + \mathrm{sen}^2\psi(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2)], & K > 0 \\ d\psi^2 + \psi^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2), & K = 0 \\ (-K)^{-1}[d\psi^2 + \mathrm{senh}^2\psi(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2)], & K < 0 \end{cases}$$

Absorbiendo el factor $K^{-1/2}$ ó $(-K)^{-1/2}$ en $a^2(t)$, la métrica del espacio-tiempo tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\psi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2)] \tag{4.4}$$

donde

$$\Sigma = \begin{cases} \mathrm{sen}\,\psi & \text{si } \mathrm{k} \equiv K/|K| = 1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{k} \equiv K = 0 \\ \mathrm{senh}\,\psi & \text{si } \mathrm{k} \equiv K/|K| = -1 \end{cases}$$

Esta forma de la métrica es llamada de Robertson-Walker. Con la absorción del factor K correspondiente, el tensor de Riemann del 3-espacio tiene la forma

$$^{(3)}R_{abcd} = \frac{k}{a^2(t)} h_{c[a} h_{b]d} \tag{4.5}$$

y por lo tanto, la curvatura es $K \equiv k/a^2(t)$. El factor de escala está normalizado entonces para que su valor a t =hoy dé la curvatura del 3-espacio a t = hoy. Para $k = -1$ ó 0 el espacio es infinito, mientras que para $k = +1$ es finito aunque sin borde; en este caso la longitud de la circunferencia propia está dada por ${}^3L = 2\pi a(t)$, y el volumen propio por ${}^3V = 2\pi^2 a^3(t)$. De hecho, el 3-espacio con $k = 1$ puede verse como la superficie de una esfera de radio $a(t)$ en un espacio euclídeo 4-dimensional, y $a(t)$ es el "radio del universo". Tal interpretación no es posible para $k = 0$ ó -1, pero debido a que $a(t)$ tiene dimensiones de longitud, se lo llama factor de escala.

El intervalo $d\sigma^2$ con h_{ab} dada por (4.3) puede escribirse, mediante una transformación de coordenadas adecuada [69],

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta \; d\phi^2) \tag{4.6}$$

Vemos a partir de (4.4) que la suposición de que el universo es isotrópico y homogéneo determina la métrica a menos del valor de K y de la función $a(t)$ [2].

Para estudiar la dinámica del universo de forma standard se utilizan las ecuaciones de Einstein. Las simetrías adoptadas fuerzan a que el tensor de energía-impulso sea de la forma [28]

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b) \tag{4.7}$$

Esta forma del tensor de energía-impulso supone que las galaxias componen un fluido perfecto; es decir, se desprecia todo tipo de estructura (ya sea interna de las galaxias, o externa en forma de cúmulos), y también su "granularidad". En (4.7), u_a es la 4-velocidad de un sistema de referencia en el que las galaxias cercanas están en reposo (sistema "comóvil"), ρ es la densidad de energía vista en el sistema con 4-velocidad u_a, y p es la presión cinética de las galaxias. Reemplazando (4.1) y (4.7) en las ecuaciones de Einstein, se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} \tag{4.8}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp \tag{4.9}$$

donde $k = 1$ para la 3-esfera, $k = 0$ para el espacio plano, y $k = -1$ para la pseudoesfera. Además hay que tener en cuenta la ecuación $T^{ab}{}_{;b} = 0$ (conservación de la energía), que en este caso toma la forma

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3) \tag{4.10}$$

Las ecuaciones (4.8), (4.9), y (4.10) no son independientes, ya que están relacionadas a través de las identidades de Bianchi [28]. Usualmente se conservan las ecuaciones (4.8) y

[2] En realidad estas hipótesis no son independientes: puede mostrarse que la isotropía respecto de cada punto del espacio-tiempo implica la homogeneidad.

(4.10). Incorporando además la ecuación de estado $p = k\rho$ se logra el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica del llamado modelo standard de la cosmología, también conocido como modelo de Friedman-Robertson-Walker, debido a que Friedmann fué el primero en obtener soluciones con una geometría de 3-esfera y en el caso de polvo [88]. El modelo standard provee una descripción confiable y verificada observacionalmente de la historia del universo desde 10^{-2} seg. después del *big-bang* hasta hoy (algo así como 15×10^9 años después [89]).

Introduzcamos ahora una serie de definiciones que serán útiles mas adelante. El radio de Hubble es la distancia desde un punto dado a un objeto en movimiento con la expansión cosmológica a la velocidad de la luz:

$$R_H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{H} \tag{4.11}$$

También puede pensarse a R_H como la distancia propia recorrida por la luz en el tiempo de Hubble $t_H \equiv \dot{a}/a = 1/H$. Usualmente se parametriza a H en función de h: $H = 100h$ km s^{-1} Mpc^{-1}, con $0.4 \leq h \leq 1$.

A partir de (4.6) puede verse que los efectos de la curvatura espacial serán muy importantes cuando $r \sim |K|^{-1/2}$. Se define entonces un radio de curvatura "físico" del universo según $R_c \equiv a(t)|K|^{-1/2}$. Utilizando la ecuación de Friedmann,

$$R_c = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}} \tag{4.12}$$

Por último, con las definiciones $\rho_c = \frac{3}{8\pi G}(\dot{a}/a)^2$ (densidad crítica) y $\Omega(t) = \rho/\rho_c$ (parámetro de densidad), la ecuación (4.8) puede escribirse

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{c^2}H(t)(\Omega - 1) \tag{4.13}$$

Por lo tanto, el que el espacio sea cerrado o abierto depende del valor de Ω.

La evidencia experimental que confirma al modelo standard está apoyada principalmente en tres observaciones:

1. La expansión del universo
   En 1922, Slipher [90] presentó datos que revelaban un corrimiento al rojo de las líneas de absorción de 36 nebulosas espirales. Estos cambios en frecuencia fueron interpretados como consecuencia del efecto Doppler originado en el movimiento del sistema solar, y también como debidos a campos gravitacionales locales muy intensos. Mas tarde, Wirtz [91] y Lundmark [92] mostraron que de las observaciones de Slipher se concluía que el redshift aumentaba con la distancia entre la fuente y el observador. Finalmente, Hubble [93] estableció que existe una relación aproximadamente lineal

entre distancias y velocidades. En definitiva, quedó firmemente establecido el origen cosmológico del redshift, originado en la velocidad de recesión que muestran las galaxias. La ley de Hubble puede obtenerse a partir del modelo standard por medio de un cálculo simple [94].

2. La radiación cósmica de fondo
Según la descripción de la evolución del universo hecha por el modelo standard , a un *redshift* $z \sim 1100$ (es decir cuando el universo tenía una edad de $180000(\Omega_o h^2)^{-1/2}$ años, y su temperatura era de $\sim 10^3$ K), la radiación se desacopló de la materia (compuesta en su mayoría por H neutro). Esa radiación (predicha por Gamow en 1946 [95]) fué detectada en forma accidental por Penzias y Wilson [96], mientras el grupo formado por Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson preparaba un dispositivo para buscarla. Desde entonces se ha establecido firmemente que el espectro de la radiación es el de un cuerpo negro a temperatura $T = 2.735 \pm 0.06$ K, a través de medidas que cubren más de tres décadas en longitud de onda (0.03 cm a 100 cm), obtenidas por el Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS) del COBE [97]. Los fotones del fondo cósmico de radiación de microondas (FCRM) son los mas antiguos que podemos ver hoy, y dan una información directa de las inhomogeneidades en la materia bariónica sobre la última superficie de scattering.

3. Nucleosíntesis primordial
De acuerdo a la cosmología standard, cuando la edad del universo era de algunos segundos, la temperatura alcanzaba algunas décimas de MeVs, y las condiciones eran las apropiadas para el comienzo de reacciones nucleares que llevaron a la síntesis de núcleos de D, ^{3}He, ^{4}He, y ^{7}Li. Las predicciones del modelo para las abundancias de tales elementos coinciden con la observación si $0.011 < \Omega_B < 0.12$, y $N_\nu < 3.4$ (donde Ω_B es el parametro de densidad para la materia bariónica, y N_ν es el número de neutrinos livianos) [98].

A pesar del éxito del modelo standard respecto de los puntos anteriores (y de otros, entre los que podemos mencionar la formación de estructura [99] a través del mecanismo de inestabilidad gravitacional de Jeans [100]), subsisten algunos problemas que el modelo no soluciona, o que ni siquiera contempla:

1. El problema de la edad del universo

   La edad del universo puede ser medida de diversas maneras: a través de elementos radioactivos, estableciendo la edad de las estrellas mas viejas en cúmulos globulares, el tiempo de enfriamiento de las enanas blancas, o el de enfriamiento de gas caliente en clusters, por citar algunas [94]. Estas técnicas dan resultados consistentes en el rango de 10 a 20 Giga años (Ga). La edad de un universo dominado por materia es, de acuerdo al modelo standard [101],

$$t_0 = F(\Omega_0)h_0^{-1} \approx 9.8F(\Omega_0)h^{-1}\text{Ga} \tag{4.14}$$

(el subíndice 0 indica $t =$ hoy) donde $F(\Omega)$ está dada por

$$F(\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2}(\Omega-1)^{-3/2}\cos^{-1}(\frac{2}{\Omega}-1) - (\Omega-1)^{-1}, & \Omega > 1 \\ 2/3, & \Omega = 1 \\ (1-\Omega)^{-1} - \frac{\Omega}{2}(1-\Omega)^{-3/2}\,\mathrm{ch}^{-1}(\frac{2}{\Omega}-1), & \Omega < 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

$F(\Omega_0)$ está entre 1 y 2/3 para $\Omega_0 \in [0,1]$. Para $h \in [0.5, 1]$, t_0 está aproximadamente entre 7 y 20 Ga. En particular, $h = 0.5$ y $\Omega_0 = 1$ dan $t_0 \approx 13$ Ga, en acuerdo con las medidas anteriores. Sin embargo hay medidas de H_0 que implican que h es aproximadamente 0.8 [102]; con este valor, y $\Omega_0 = 1$, $t_0 \approx 8$ Ga, que es inconsistente con la observación.

2. El problema de la materia oscura

   A partir de observaciones en galaxias, clusters, y estructuras aún mayores, se concluye que hay en el universo más masa que la asociada a objetos luminosos. Además, debido al límite impuesto por la nucleosíntesis sobre la cantidad de materia bariónica Ω_B, la mayor parte de la materia faltante debe ser no bariónica. La cosmología standard no trata el problema de la composición de dicha materia. Tal problema podría tener solución al incorporar a la cosmología nuevas partículas provenientes de teorías mas fundamentales que el modelo standard de las interacciones, que genéricamente se denominan WIMPs (esto es, partículas masivas débilmente interactuantes).

3. El problema de la homogeneidad

   Las medidas hechas por el COBE muestran que los fotones del FCRM están en equilibrio térmico aún cuando provengan de puntos antipodales en el cielo (es decir, aún cuando no hayan estado jamás conectados causalmente). Sin embargo, el tamaño del horizonte d_H en el pasado corresponde a una separación angular finita entre dos puntos en el cielo. En el caso del tiempo de desacople, $d_H(t_d) \approx 200h^{-1}$ Mpc, y la correspondiente separación angular es $\theta_d = 0.87°\sqrt{\Omega_0}(z_d/1100)^{-1/2}$. Así, separaciones angulares mayores que θ_d corresponden a escalas mayores que $d_H(t_d)$, y por lo tanto, puntos separados por una distancia angular mayor que θ_d no estaban en contacto causal a t_d.

   Este problema puede formularse también en términos de entropía. Dado que durante la mayor parte de la historia del universo las velocidades de reacción de las partículas son mucho mayores que H, se mantuvo el equilibrio térmico local, con la consecuencia de que la entropía por elemento de volumen comóvil permanece constante (es decir, $s \propto R^{-3}$). El universo que observamos hoy corresponde a un volumen comóvil que contiene una entropía del orden de 10^{88}. La entropía dentro del horizonte a $t = t_{\rm rec}$ era del orden de 10^{85}; esto significa que el volumen de Hubble actual está compuesto de aproximadamente 10^5 regiones causalmente desconectadas a t_{rec}, de manera tal que procesos causales no pudieron haber influído en la homogeneización.

4. El problema de la planaridad

   A partir de la ecuación de Friedmann se encuentra facilmente que durante la evolución del universo,

$$(\Omega^{-1}(t) - 1)\rho(t)a(t) = \text{constante} \tag{4.16}$$

   Si denotamos con el subíndice eq a las cantidades al tiempo de equivalencia entre las contribuciones de radiación y materia al tensor de energía-impulso,

$$\rho = \rho_{eq}\left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4, \text{ dominio de radiación}, t < t_{eq} \tag{4.17}$$

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \text{ dominio de materia}, t > t_{eq} \tag{4.18}$$

   se obtiene

$$\Omega^{-1} - 1 = (\Omega_0^{-1} - 1) \times 10^{-60}\left(\frac{T_{\mathrm{Pl}}}{T}\right)^2 \tag{4.19}$$

   El valor de Ω_0 está restringido por las observaciones al rango $10^{-2} < \Omega_0 < 2$ [94]. A partir de (4.19) vemos que Ω tiene que haber diferido extremadamente poco de 1 a $t = t_{\mathrm{Pl}}$. El modelo standard no tiene explicación para esta condición inicial.

5. El problema de la formación de estructura

   Las observaciones indican que tanto las galaxias como los clusters de galaxias exhiben correlaciones no aleatorias en escalas mayores que 50 Mpc [103, 104]. Esta escala es comparable con el horizonte comóvil a $t = t_{eq}$. Por lo tanto, si las perturbaciones iniciales de densidad fueron producidas mucho antes de t_{eq}, las correlaciones observadas hoy no pueden explicarse por mecanismos causales. Por otro lado, la gravedad por sí sola tampoco es suficiente para dar cuenta de estas correlaciones. Es decir que las correlaciones observadas no tienen explicación en el contexto de la cosmología standard, así como tampoco lo tiene el origen de las inhomogeneidades que hicieron de "semillas" para la formación de estructura.

6. El problema de la constante cosmológica

   La modificación más general posible que puede hacerse a las ecuaciones de Einstein respetando la covariancia general es agregar el término que incluye a la constante cosmológica Λ:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{4.20}$$

   Tal término es equivalente a una forma adicional de energía-impulso, caracterizada por energía constante y presión isotrópica:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad p_\Lambda = -\tfrac{\Lambda}{8\pi G} \tag{4.21}$$

y por lo tanto, $\rho = -p$. Basándose en la covariancia, la expresión del tensor de energía-impulso debe ser (4.21). Es posible mostrar que la solución a las ecuaciones de Einstein con (4.21) como fuente tiene la forma

$$a(t) \propto e^{Ht}, \text{ con } H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}} \tag{4.22}$$

Es decir que la expansión se acelera con el tiempo, y la energía total en el volumen comovil crece: $E \propto a^3\rho_\Lambda$ (esto se debe a la naturaleza "elástica" del vacío). Observaciones a $t = t_{\text{hoy}}$ permiten establecer que $\Lambda \sim 8.07 \times 10^{-47} h^2$ GeV^4. Este valor tan pequeño de Λ no tiene explicación en el modelo. Mas aún, a partir de consideraciones hechas en el marco de la teoría cuántica de campos, $\Lambda/8\pi G \sim m_{\text{Planck}}^4$, lo que implica 122 órdenes de magnitud de discrepancia [105].

7. El problema de los remanentes

   En todas las teorías de gauge de unificación (incluyendo al modelo standard), la simetría de gauge subyacente es mayor que la del vacío. El interés de la cosmología en este tema radica en que, como lo muestran los trabajos de Weinberg [106] y Dolan y Jackiw [107], las simetrías que están espontaneamente rotas hoy no lo están a temperaturas altas. Durante la evolución del universo se produjeron entonces transiciones de fase, asociadas con la ruptura de distintas simetrías, a medida que la temperatura fué disminuyendo. Tales transiciones originan defectos topológicos por medio del mecanismo de Kibble [108]. Durante una transición de fase cosmológica, la longitud de correlación ψ asociada al campo de Higgs Φ responsable de la ruptura puede tener como máximo el tamaño del horizonte. Por lo tanto, cualquier configuración no trivial de vacío de Φ será producida con una abundancia del orden de una por volumen de horizonte.

   De acuerdo a la estructura que exhiba la variedad asociada al vacío de la teoría pueden tener lugar distintos defectos topológicos: paredes de dominio, cuerdas cósmicas, texturas, y monopolos magnéticos, entre otros. Tomemos como ejemplo a estos últimos. Se trata de defectos puntuales, que aparecen por ejemplo en una teoría de gauge $SO(3)$ en la que este grupo está roto a $U(1)$ por un triplete de Higgs ϕ^a [94]. La densidad de monopolos debería ser $n_M \approx T_c^6/m_{\text{Pl}}^2$, donde T_c es la temperatura crítica asociada a la transición de fase. Como la densidad de entropía a temperatura T_c es $s \approx T_c^3$, $n_M/s \approx (T_c/m_{\text{Pl}})^3$. A partir de $T_c \approx 10^{14}$ GeV y $m_M \approx 10^{16}$ GeV, la densidad de monopolos hoy debe ser $\approx 10^{11}\rho_c$, un valor claramente inaceptable.

En 1981, Guth [109] propuso una solución para tres de los problemas enumerados antes; tal solución se basa en que durante el universo temprano, el factor de escala tuvo el comportamiento mostrado en (4.22). Esta fase del universo es llamada inflacionaria, y merece una sección aparte.

4.2 Inflación

La idea básica de la inflación cosmológica es que hubo una época de la evolución del universo durante la cual la energía de vacío de un campo escalar ϕ era la componente dominante de la densidad de energía, y por lo tanto el factor de escala creció segun (4.22). Durante tal época, una región pequeña, suave y causalmente conexa del universo, de tamaño menor que H^{-1} crece hasta un tamaño tal que abarca sobradamente al volumen comovil que constituye el universo que se observa hoy, siempre y cuando el período inflacionario tenga la duración suficiente.

Existen varios tipos de inflación [110], pero todos ellos tienen dos características en común: expansión superlumínica, y producción de entropía en gran cantidad. La inflación actúa genericamente de la siguiente manera: si tomamos una región homogénea del universo de tamaño H^{-1}, ésta inicialmente contiene una entropía $S_i \approx T_i^3(H^{-1})^3$, que es pequeña respecto de la que hay en el volumen de Hubble hoy. Durante la expansión exponencial, $T \propto e^{-Ht}$ (*"supercooling"*), mientras que la entropía permanece constante. Por medio de un mecanismo de recalentamiento (que depende de la teoría inflacionaria que se adopte) la temperatura sube nuevamente, lo que incrementa enormemente la entropía dentro de la región considerada. Este gran incremento de entropía resuelve tres de los problemas mencionados antes. La pequeña región inicial, que contenía una fracción mínima (antes de la era inflacionaria) de la entropía del universo, contiene después de la inflación una entropía muchas veces mayor que la del universo observable, lo que resuelve el problema de la homogeneidad. Durante la inflación, la densidad de energía del universo permaneció constante, mientra que el radio de curvatura creció exponencialmente. Por lo tanto, según la ecuación (4.19), Ω_0 se acerca exponencialmente a 1, lo que soluciona el problema de la planaridad. Por último, también queda resuelto el problema de los remanentes: como la porción de universo que observamos pertenecía a una región mayor y causalmente conexa antes de que ocurra el período inflacionario, en ella hay sólo una fase del campo ϕ, y por lo tanto podemos esperar del orden de un monopolo en nuestro volumen de Hubble actual. Es decir que la expansión inusual ocurrida durante la inflación diluyó la superabundancia de monopolos magnéticos (y de la misma manera, la de los demás defectos).

En cambio, la inflación no resuelve el problema de la inhomogeneidad a escalas pequeñas (para el cual se necesita de un tratamiento semiclásico) ni el problema de la constante cosmológica [3].

4.3 Modelos alternativos

En las secciones anteriores vimos como el modelo standard de la cosmología mas la teoría de la inflación explica de manera aceptable el universo que observamos. ¿Qué motivaciones

[3] Respecto del problema de la edad del universo, actualmente hay consenso en que se trata de un problema observacional, debido a la incerteza en las distintas medidas de H_0.

puede haber entonces para estudiar modelos más generales (esto es, con menos simetría)? Algunas razones son:

1. La hipótesis de isotropía está verificada por las observaciones del COBE, que son las más precisas de la cosmología observacional. Sin embargo, la información que puede obtenerse del FCRM es válida sólo a partir del tiempo de recombinación t_r, y por lo tanto la extrapolación a $t < t_r$ está injustificada.

2. La simetría que presenta el universo hoy (reflejada en la métrica de Robertson-Walker) no debería ser una de las hipótesis de partida, sino que debería ser consecuencia de la evolución a partir de modelos con menos simetría.

3. Extrapolando el comportamiento del universo de Friedman-Robertson-Walker a tiempos pequeños, el modelo muestra una singularidad. Debido a que, en algún momento de su evolución, el Universo podría haber tenido anisotropías e inhomogeneidades, es necesario comprobar si la presencia de la singularidad inicial es un comportamiento genérico de la teoría .

4. Finalmente, la hipótesis de homogeneidad a gran escala tiene un soporte observacional pobre [111]. Hay que recordar que el estudio de la homogeneidad espacial requiere conocer la distribución de materia a grandes distancias a t = hoy (es decir, en la hipersuperficie a t =cte=hoy), mientras que lo que observamos es lo que ocurrió en el pasado lejano.

4.3.1 Modelos homogéneos

Debido a que la isotropía espacial respecto de cada punto implica homogeneidad espacial, el primer paso para generalizar el modelo standard es considerar soluciones homogéneas pero anisotrópicas. Este debería ser un problema soluble en principio, ya que debido a la simetría espacial, sólo las variaciones temporales deberían ser no triviales. En particular, es posible aplicar técnicas de la teoría de sistemas dinámicos [112], y simplificar la métrica aprovechando los automorfismos del álgebra de Lie corespondiente [113]. Como vimos en la sección (4.1), un espacio-tiempo espacialmente homogéneo es aquel que posee un grupo de isometrías cuyas órbitas son hipersuperficies tipo espacio que folian el espacio-tiempo. Es posible mostrar que todo grupo de isometrías es un grupo de Lie [30]. Considerando sólo aquellos grupos de Lie que actúan en forma transitiva simple sobre cada hoja Σ_t [4], los elementos de G pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los de Σ_t. Puede mostrarse entonces que la estructura de la variedad asociada al espacio-tiempo es $M^4 = R \times G$, y la métrica del espacio-tiempo tiene la forma

$$g_{ab} = -\nabla_a t \nabla_b t + \sum_{\alpha,\beta=1,2,3}^{3} h_{\alpha\beta}(t)(\sigma^\alpha)_a(\sigma^\beta)_b \tag{4.23}$$

[4] Esta restricción sólo excluye al caso del universo de Kantowski-Sachs [114].

donde $t^a = -\nabla^a t$ es el vector unitario normal a Σ_t, $\{(\sigma^\alpha)_a\}$ $(a = 1,2,3)$ es una base de campos vectoriales duales que son preservados por la isometría y satisfacen

$$\nabla_{[a}(\sigma^\alpha)_{b]} = -\frac{1}{2}C^d{}_{ab}(\sigma^\alpha)_d, \tag{4.24}$$

y $C^a{}_{bd}$ es el tensor de constantes de estructura del grupo de Lie. Así, para construir modelos cosmológicos espacialmente homogéneos, elegimos un grupo de Lie de 3 parámetros, una base de campos vectoriales duales invariantes izquierdos en G, y las funciones $h_{\alpha\beta}(t)$. Todas las cosmologías con acción transitiva simple pueden ser construidas de esta manera [115]. Basta entonces encontrar todos los grupos de Lie tridimensionales, y luego resolver las ecuaciones de Einstein con la métrica (4.23). Nos limitaremos aquí a señalar que Bianchi [116] encontró todas las álgebras de Lie de 3 parámetros, y las clasificó en 9 tipos (los detalles se encuentran en [115]).

Respecto de la cosmología, los modelos de Bianchi sólo pueden ser relevantes como modelos de comportamiento asintótico (en el universo temprano o tardío) o sobre escalas de tiempo muy grandes [117]. Entre las aplicaciones de estos modelos podemos citar los trabajos de Lifshitz y Khalatnikov [118], y Misner [119], respecto del comportamiento de las soluciones cosmológicas cerca de la singularidad inicial, y los de MacCallum [120], y Barrow y Tipler [121], que tratan la evolución del universo en el futuro lejano.

4.3.2 Modelos inhomogéneos

A la fecha, no se ha encontrado la solución general de las ecuaciones de Einstein para el modelo totalmente inhomogéneo, debido a la complejidad de las ecuaciones en este caso. Sin embargo, se han considerado modelos modelos con menor grado de inhomogeneidad, para los cuales se encontraron soluciones analíticas exactas. Entre éstos podemos citar a los siguientes:

1. Modelos G_3: son los que admiten un grupo de isometrías de 3 parámetros que actúa sobre superficies bidimensionales. La métrica general tiene la forma

$$ds^2 = -A^2(r,t)dt^2 + B^2(r,t)dtdr + C^2(r,t)dr^2 + D^2(r,t)(d\theta + f^2(\theta)d\phi^2) \tag{4.25}$$

y puede ser simplificada eligiendo coordenadas convenientes. En el caso $f(\theta) = \text{sen}\theta$, el modelo resultante es esfericamente simétrico bajo ciertas condiciones [122]. Si, con la elección $A = 1$, $D = D(t)$, la métrica es la versión inhomogénea de la de Kantowski-Sachs [123]; se obtiene la métrica de Kantowski-Sachs homogénea si $C = C(t)$. Estos modelos se han aplicado principalmente al estudio del crecimiento de perturbaciones locales al modelo de Friedman-Robertson-Walker, con el objeto de comprender el mecanismo de formación de galaxias.

2. Modelos G_2: admiten un grupo de isometrías que actúa sobre órbitas bidimensionales, con dos vectores de Killing tipo espacio. Un caso muy estudiado es aquel en el

que las órbitas de G_2 son ortogonales a otro conjunto de superficies bidimensionales V_2. Wainwright [124] dió una clasificación de estos modelos para el caso de un G_2 abeliano, de acuerdo a si el grupo actúa en forma transitiva ortogonal, y a si admite un vector de Killing ortogonal a la hipersuperficie como generador. Se conocen varias soluciones exactas de este tipo: Wainwright y Goode [125], Kramer [126], y Senovilla [127]).

3. Soluciones de Szekeres: tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2A}dx^2 + e^{2B}(dy^2 + dz^2) \tag{4.26}$$

con $A = A(x, y, z, t)$ y $B = B(x, y, z, t)$. Szekeres [128] resolvió las ecuaciones de Einstein para esta métrica en el caso de materia tipo polvo, mientras que Szafron [129] discutió el caso general.

4. Modelos autosimilares: son modelos G_2 ó G_3 que admiten además un grupo de homotecias, generado por vectores de Killing Y que satisfacen

$$\pounds_Y g = ag \tag{4.27}$$

(en coordenadas, $Y_{(\mu;\nu)} = ag_{\mu\nu}$), donde a es una constante. Fueron estudiados en profundidad por Eardley [130] en el caso en que el generador de homotecias es tipo espacio, y por Hewitt *et al* [131] para generador tipo tiempo.

Pasemos ahora a una breve descripción de los modelos cosmológicos multidimensionales que pueden encontrarse en la literatura.

4.4 Cosmología multidimensional

Toda teoría que postule la existencia de un número de dimensiones espaciales mayor que el observado debe dar cuenta del hecho de que las dimensiones internas sean inobservables, al menos en la escala de energías que se alcanzan en los experimentos actuales [5]. Además, es lógico suponer que en el universo temprano (esto es, a tiempos t que satisfacen $t\, m_P \geq 1$), todas las dimensiones espaciales tenían un tamaño comparable. Sería satisfactorio entonces que el universo alcance el estado actual a causa de la dinámica de la teoría, con el menor número de suposiciones *ad-hoc*. Este problema es común a un número de teorías propuestas recientemente, como ser la supergravedad [134] y las supercuerdas [135].

Con la finalidad de estudiar la evolución cosmológica de alguna de las teorías mencionadas arriba, habría que resolver las ecuaciones de Einstein con el miembro derecho dado por el sector de materia de la acción, y la solución debería ser tal que alcance en algún momento el estado actual del universo: el 3-espacio en expansión, y n dimensiones

[5] La posibilidad de detectar alguna manifestación experimental de la torre infinita de estados de masa de la teoría de Kaluza-Klein está analizada en [132] y [133].

internas y estáticas. Si bien existen algunas soluciones particulares a este tipo de problemas, debido a la complejidad de las ecuaciones de movimiento, la solución general es difícil de hallar. Además, antes de pasar a buscar soluciones, es necesario elegir configuraciones de vacío para los campos de gauge y de materia, y éstas no están unívocamente determinadas en ninguna de las teorías mencionadas antes. Por esto es que se consideran *toy models* que permiten aislar efectos de contribuciones de distintos tipos de materia al lado derecho de las ecuaciones de Einstein.

Para estudiar las soluciones cosmológicas en teorías $4+n$ dimensionales se han aplicado dos procedimientos: en uno de ellos se supone que la variedad M^{4+n} está factorizada en $R \times M^3 \times B^n$ debido a algún proceso que no se especifica (aunque se lo ubica en el régimen en que los efectos de la gravedad cuántica no pueden ignorarse [33]) y se estudia la evolución temporal de ambas variedades imponiéndoles diversos grados de simetría. En el segundo procedimiento, alguna solución particular para los campos de materia de la teoría hace que la factorización mencionada antes se produzca dinámicamente. Desde un punto de vista lógico, el segundo caso es mas satisfactorio que el primero.

Si tanto M^3 como B^n son espacios maximalmente simétricos, se adopta una métrica con dos factores de escala dependientes del tiempo:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j - b^2(t)\hat{g}_{mn}(y)dy^n dy^m \tag{4.28}$$

$(i,j = 1,2,3;\ m,n = 4,...,D)$, donde $\tilde{g}_{ij}$ y $\hat{g}_{mn}$ corresponden a espacios maximalmente simétricos [6]. La forma diagonal por bloques de la métrica es una hipótesis *ad-hoc*; lo ideal sería que la evolución temporal hiciera que se produzca tal factorización, como en el caso de la supergravedad $N = 1$, $d = 11$, con el *Ansatz* de Freund-Rubin para el campo de gauge F_{ABCD} [34].

Las simetrías de la métrica (4.28) imponen el siguiente tensor de energía-impulso:

$$T^0_{\ 0} = \rho \qquad T^i_{\ j} = -\tilde{p}\delta^i_{\ j} \qquad T^m_{\ n} = -\hat{p}\delta^m_{\ n} \tag{4.29}$$

Introduciendo (4.28) y (4.29) en las ecuaciones de Einstein escritas en la forma

$$R_{AB} = 8\pi\bar{G}\left[T_{AB} - \frac{1}{D+2}\,g_{AB}\,T - \frac{1}{D+2}\,\frac{\Lambda}{8\pi\bar{G}}\,g_{AB}\right] \tag{4.30}$$

(donde $\bar{G}$ está relacionada con G_n por $\bar{G} = V^{(int)}(t = \text{hoy})$, y $T = \rho - 3\tilde{p} - d\hat{p}$) se obtiene el sistema

$$\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{D\ddot{b}}{D} = -\frac{8\pi\bar{G}}{D+2}\left[(D+1)\rho + 3\tilde{p} + D\hat{p} - \rho_\Lambda\right] \tag{4.31}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + D\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2\tilde{k}}{a^2} = \frac{8\pi\bar{G}}{D+2}\left[\rho + (D-1)\tilde{p} - D\hat{p} + \rho_\Lambda\right] \tag{4.32}$$

[6] Un espacio maximalmente simétrico es aquel cuya métrica admite el máximo número posible de vectores de Killing; dicho número es $n(n+1)/2$, donde n es el número de dimensiones.

$$\frac{\ddot{b}}{D}+(D-1)\frac{\dot{b}^2}{b^2}+3\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}+\frac{(D-1)\hat{k}}{b^2}=\frac{8\pi\bar{G}}{d+2}\left[\rho-3\tilde{p}+2\hat{p}+\rho_\Lambda\right] \tag{4.33}$$

con $\hat{k}$ y $\tilde{k}$ =0,$\pm$1. Las derivadas segundas pueden eliminarse de (4.31) usando (4.32) y (4.33), dando como resultado la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{3\dot{a}}{a}+\frac{D\dot{b}}{b}\right)^2-\frac{3\dot{a}^2}{a^2}-\frac{D\dot{b}^2}{b^2}-\frac{6\tilde{k}}{a^2}+\frac{2D\hat{k}}{b^2}=\bar{\Lambda}+16\pi G\rho \tag{4.34}$$

Además, las funciones ρ, $\tilde{p}$, y $\hat{p}$ están relacionadas a través de la conservación de la energía:

$$\dot{\rho}+\frac{3\dot{a}}{a}(\rho+\tilde{p})+\frac{D\dot{b}}{b}(\rho+\hat{p})=0 \tag{4.35}$$

Las soluciones de la cosmología definida por las ecuaciones (4.34) y (4.35)) presentan una gran variedad de comportamientos [33][94], y se han hallado, entre otros, para los siguientes tipos de materia: campo escalar [136], radiación [137], Casimir mas constante cosmológica [44], monopolo mas constante cosmológica [138], $R^2+\Lambda$ [139]. También se han encontrado soluciones para la supergravedad N=1 acoplada con un campo de Yang-Mills en 10-d [84], para la teoría de Jordan-Brans-Dicke en N dimensiones [85], y para el sector bosónico de la supergravedad $N=1, d=10$ y $N=1, d=11$ [85].

El caso homogéneo ha sido estudiado mucho menos que el de Robertson-Walker debido a que la clasificación de las álgebras de Lie asociadas al grupo de isometría de la superficie espacial depende del número de dimensiones de dicha superficie. En el caso de la teoría de Kaluza-Klein, dicho número es arbitrario, y se ha analizado el caso $1+3+1$ [140] siguiendo la clasificación de las álgebras de Lie reales 4-dimensionales realizada por Fee [141], que comprende 15 álgebras distintas, algunas de las cuales generalizan a las de Bianchi. Existe una cantidad apreciable de trabajos dedicados a estudiar soluciones cosmológicas homogéneas de la Supergravedad: para el caso $N=1$, $d=10$ [142], y para $N=1$, $d=11$ [143] [144], a partir de la clasificación de las álgebras 10-dimensionales correspondientes, hecha por (cite). También se han encontrado soluciones cosmológicas de la teoría de Supercuerdas, en el límite de bajas energías, en el cual las superficies de homogeneidad son 3-dimensionales [145] [146].

En cambio, los modelos inhomogéneos multidimensionales han sido muy poco estudiados debido a la complejidad de las ecuaciones, que, a diferencia del caso homogéneo, son en derivadas parciales. En supercuerdas, ha sido posible calcular soluciones cosmológicas en el límite de bajas energías [147]. En la teoría de Kaluza-Klein se han analizado casos simples de modelos en 1+3+1, en presencia de materia y con una constante cosmológica no nula. La métrica adoptada tiene la forma

$$ds^2=dt^2-R^2\left(dr^2+r^2d\Omega^2\right)-A^2\,dy^2 \tag{4.36}$$

El caso $R=R(r,t)$ y $A=A(r,t)$ fué resuelto por Chatterjee *et al* [148] para una elección conveniente de las constantes de integración. Mas simple es analizar el caso $R=R(t)$ y

$A = A(r, t)$, que corresponde a un 3-espacio plano y homogéneo, con la inhomogeneidad presente sólo en la coordenada extra. Las ecuaciones de Einstein para esta métrica son

$$G_{01} = \frac{2\dot{A}'}{A} - \frac{2\dot{R}A'}{RA} = 0 \tag{4.37}$$

$$G^1{}_1 = \frac{2A'}{AR^2 r} - \left[\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\dot{R}\dot{A}}{RA}\right] = -\tilde{p} - \Lambda \tag{4.38}$$

$$G^2{}_2 = G^3{}_3 = \frac{1}{R^2}\left[\frac{A''}{A} + \frac{A'}{Ar}\right] - \left[\frac{2\ddot{R}}{R} + \dot{R}^2 R^2 + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{2\dot{R}\dot{A}}{RA}\right] = -\tilde{p} - \Lambda \tag{4.39}$$

$$G^4{}_4 = -3\left[\frac{\ddot{r}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}\right] = -\hat{p} - \Lambda \tag{4.40}$$

$$G^0{}_0 = \frac{1}{R^2}\left[\frac{A''}{A} + \frac{2A'}{Ar}\right] - 3\left[\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{R}\dot{A}}{RA}\right] = -\rho - \Lambda \tag{4.41}$$

Ha sido posible resolver analíticamente este sistema en el caso de $\Lambda = \tilde{p} = \hat{p} = 0$ [149], $\tilde{p} = \hat{p} = 0$ [150], y en el caso general [151], con una determinada elección de las constantes de integración, que implica que el 3-espacio sufre un período inflacionario. Sin embargo, debemos recordar que el modelo 5-dimensional no deja de ser una primera aproximación a un modelo realista, y que, por otra parte, en la teoría de Kaluza-Klein el número de dimensiones espaciales no está fijado por ningún principio fundamental. Es importante entonces determinar la existencia de soluciones del modelo para un n arbitrario, que es el tema de la sección siguiente [7].

4.5 Inflación en modelos inhomogéneos multidimensionales

En la mayoría de los trabajos relacionados con inflación, se considera que la dinámica del campo ϕ (responsable de "manejar" la inflación) se desarrolla en un background de Robertson-Walker. Esta hipótesis simplificadora hace que la inflación sea una tautología, a menos que esté bien justificada. Por lo tanto es necesario estudiar la posibilidad de inflación con una condición inicial mas general que el espacio-tiempo isótropo y homogéneo. Debido a que no hay teoremas al respecto, se impone investigar si la teoría de la inflación funciona a partir de modelos homogéneos e inhomogéneos. En el primer caso, el análisis hecho por Wald [152] muestra que la inflación es viable para todos los modelos de Bianchi (excepto para unos pocos del tipo IX). En el caso inhomogéneo, Jensen y Stein-Schabes [153] lograron probar que el modelo funciona para universos cerrados. En lo que sigue nos

[7] Los resultados expuestos de aquí en mas están en el trabajo "Inflationary solutions and inhomogeneous Kaluza-Klein cosmology in 4+n dimensions", S. Perez Bergliaffa, enviado a Phys. Lett. A.

restringiremos a estudiar sólo una de las condiciones necesarias para que haya inflación: la existencia de soluciones de las ecuaciones de Einstein exponencialmente crecientes con t [8]. Debido a la complejidad del caso general, desarrollaremos aquí el caso simplificado de un 3-espacio plano y homogéneo, e introduciremos la inhomogeneidad en las n dimensiones extras. El tensor métrico que proponemos es tal que el intervalo $4+n$-dimensional toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) - A^2(r,t)dy^2 \tag{4.42}$$

donde $dy^2 \equiv \sum_{i=4}^{4+n} dy_n^2$. Por lo tanto, el n-espacio es plano e inhomogéneo. Las componentes distintas de cero del tensor de energía-impulso son

$$T^0_{\ 0} = \rho(r,t) + \Lambda \qquad T^1_{\ 1} = T^2_{\ 2} = T^3_{\ 3} = -\tilde{p}(r,t) + \Lambda \qquad T^4_{\ 4} = ... = T^n_{\ n} = -\hat{p}(r,t) + \Lambda \tag{4.43}$$

(Λ es la constante cosmologica $4+n$ dimensional, y $\hat{p}$ es la presión interna).

Las ecuaciones de Einstein para la métrica (4.42) toman la forma

$$\frac{\dot{A}'}{A} - \frac{\dot{R}A'}{RA} = 0 \tag{4.44}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2n\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA} + n\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{2n}{r}\frac{A'}{AR^2} + \frac{n(1-n)}{2}\frac{A'^2}{A^2R^2} = \Lambda - 8\pi\tilde{p} \tag{4.45}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2n\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA} + n\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\dot{A}^2}{A^2} - n\frac{A''}{AR^2} - \frac{n}{r}\frac{A'}{AR^2} + \frac{n(1-n)}{2}\frac{A'^2}{A^2R^2} = \Lambda - 8\pi\tilde{p} \tag{4.46}$$

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 3n\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA} - n\frac{A''}{AR^2} + \frac{n(1-n)}{2}\frac{A'^2}{A^2R^2} - \frac{2n}{r}\frac{A'}{AR^2} = \Lambda + 8\pi\rho \tag{4.47}$$

$$(n-1)\frac{\ddot{A}}{A} + (n-1)(n-2)\frac{\dot{A}^2}{A^2} + 3(n-1)\frac{\dot{R}\dot{A}}{RA} + 3\frac{\ddot{R}}{R} + 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - (n-1)\frac{A''}{AR^2}$$
$$-(n-1)(n-2)\frac{A'^2}{A^2R^2} - \frac{2(n-1)}{r}\frac{A'}{AR^2} = \Lambda - 8\pi\hat{p} \tag{4.48}$$

donde un punto (una prima) denota diferenciación respecto de la coordenada temporal (radial) [9]. También adoptamos una ecuación de estado de la forma $p = k\rho$.

La ecuación (4.44) puede ser integrada, y su solución es

$$A(r,t) = F(r)R(t) + G(t) \tag{4.49}$$

donde $F(r)$ y $G(t)$ funciones arbitrarias. De (4.45) y (4.46) podemos obtener

$$A(r,t) = f(t)br^2 + g(t) \tag{4.50}$$

[8] La cuestión del comienzo de la inflación en un espacio-tiempo inhomogéneo ha sido estudiada por Deruelle y Goldwirth [154] y por Iguchi e Ishihara [155].

[9] El sistema (4.44)-(4.48) se reduce a las ecuaciones dadas en [151] en el caso $n = 1$.

donde b es una constante arbitraria. Comparando (4.49) y (4.50) se sigue que

$$A(r,t) = br^2 R(t) + g(t) \tag{4.51}$$

Usando (4.51) y la ecuación de estado en las ecuaciones (4.45) y (4.47) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\frac{k}{2}f + \frac{n}{2}(n+3) + 1\right]\dot{R}^2 - (1+k)\Lambda R^2 + (n+2)R\ddot{R} = 0 \tag{4.52}$$

$$nR\ddot{g} + n[k + (k+1)(n+1)]\dot{R}\dot{g} + \left\{\frac{\dot{R}^2}{R}[2(n+1) + 3k(n+2)] - 2\Lambda(1+k)R\right.$$

$$\left. + (n+4)\ddot{R}\right\} g - 2bn[n+1+k(n+2)] = 0 \tag{4.53}$$

$$[\dot{R}^2(1+3k) + 2R\ddot{R} - \Lambda(1+k)R^2]g^2 + \frac{n}{2}(1+k)(n-1)R^2\dot{g}^2 + n(3k+2)R\dot{R}g\dot{g}$$

$$+ nR^2 g\ddot{g} - 2nb(2+3k)Rg = 0 \tag{4.54}$$

donde $f = (n+2)(n+3)$. En el caso $n = 1$, la ecuación (4.54) se reduce a una identidad.

La métrica dada en (4.42) será una solución de las ecuaciones de Einstein si y sólo si las ecuaciones (4.52), (4.53) y (4.54) son compatibles. En este caso, las ecuaciones (4.46),(4.47) y (4.48) actúan como definiciones de ρ, $\tilde{p}$ y $\hat{p}$ respectivamente.

La solución general de la ecuación (4.52) es

$$R(t) = a\left(\frac{\exp\left[\frac{(1+k)\sqrt{2f\Lambda}}{n+2}t\right] - c}{\exp\left(\frac{(1+k)\sqrt{\Lambda f/2}}{n+2}t\right]}\right)^{\frac{2(n+2)}{f(k+1)}} \tag{4.55}$$

donde $\Lambda > 0$, y a y c son constantes arbitrarias. Sin pérdida de generalidad, nos restringiremos al caso $c = 1$, que corresponde a volumen cero del 3-espacio en $t = 0$. Reemplazando la expresión (4.55) en (4.53) obtenemos

$$\ddot{g} + \sqrt{\frac{2\Lambda}{f}}\coth(2\beta t)\dot{g} - \frac{\Lambda}{f}[n+3+(n+1)\coth^2(2\beta t)]g = \frac{2(n+1)b}{a}[2\sinh(2\beta t)]^{-\frac{2}{n+3}} \tag{4.56}$$

donde $\beta = \sqrt{2\Lambda f/4(n+2)}$. No ha sido posible resolver esta ecuación para valores arbitrarios de k y n, ni para k fijo y n arbitrario [10]. De aquí en adelante consideraremos el caso

[10] Notar sin embargo que Chatterjee *et al* han encontrado una solución en el caso $k = 0$, $n = 1$ [150].

$c = 0$, que corresponde a un universo que comienza su evolución con una fase inflacionaria para el 3-espacio. Este caso ha sido estudiado, para $n = 1$, por Banerjee *et al* [151], que encontraron soluciones inflacionarias (con o sin singularidad inicial) para el 3-espacio, y expansión o contracción para las dimensiones extras, dependiendo de las constantes de integración [11].

El factor de escala $R(t)$ toma la forma

$$R(t) = a \exp\left(\sqrt{\frac{2\Lambda}{f}}t\right) \tag{4.57}$$

Después de reemplazar esta ecuación en (4.53), obtenemos una ecuación diferencial para $g(t)$ que puede ser integrada. Su solución es

$$g(t) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{2\Lambda}{f}}t\right) + C_2 \exp\left[-\sqrt{\frac{2\Lambda}{f}}(n+2)(k+1)t\right] + \frac{fb}{2a\Lambda}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\Lambda}{f}}t\right) \tag{4.58}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

Veamos ahora bajo que condiciones se satisface la ecuación (4.54). Después de reemplazar (4.57) y (4.58) en (4.54) obtenemos las siguientes ecuaciones en n:

$$(k^2 + 2k + 1)(-n^4 - 6n^3 - 9n^2 + 4n + 12) = 0 \tag{4.59}$$

$$(k+1)(n^3 + 4n^2 + n - 6) = 0 \tag{4.60}$$

$$n^3[6k(1+k) + 2(1+k^3)] + 2n^2(3k^3 + 11k^2 + 13k + 5) + \tag{4.61}$$

$$+2n(2k^2 + 5k + 3) - 2(9 + 21k + 16k^2 + 4k^3) \quad = \quad 0 \tag{4.62}$$

Es fácil comprobar que $n = 1$ es una raíz de los tres polinomios, sin importar el valor of k. Por otra parte, si restringimos los valores de k a 0 o 1/3, vemos que hay sólo una raíz común a los tres polinomios que es un número natural, y es nuevamente $n = 1$ [12].

Concluímos entonces que el modelo descripto por la métrica (4.42), el tensor de energía-impulso (4.43), y la ecuación de estado $p = k\rho$ tiene solución en el caso de un espacio-tiempo 5-dimensional para cualquier valor de k (con $c = 0$). Mas aún, los casos de polvo ($k = 0$) y radiación ($k = 1/3$) tienen solución (con $c = 0$) si y sólo si $n = 1$.

[11] Soluciones similares fueron obtenidas por Starobinskii [156] al tomar en cuenta las contribuciones a un loop al tensor de energía-impulso de campos de materia con masa nula.

[12] Soluciones para $k = 0$ y $k = 1/3$ con $n = 1$ pueden verse en [151].

Capítulo 5

SINTESIS

En esta tesis se han estudiado soluciones exactas (estáticas y dinámicas) de la teoría de Kaluza-Klein, ya sea a nivel de la teoría 4-dimensional efectiva (como es el caso de los *whormholes*), o en la teoría en $4+n$ dimensiones (en el caso de las soluciones inflacionarias).

Después de presentar en el capítulo I la teoría de Kaluza-Klein en su forma original y su generalización a modelos no abelianos, se analizaron los problemas que presenta la teoría pura, y se vió cómo la fusión de la teoría de Kaluza-Klein con la Supergravedad podría resolverlos.

En el capítulo II se reseñan las soluciones de *wormhole* en Relatividad General , y las condiciones de energía que debe satisfacer la materia que genera el *wormhole* . Esta materia resulta ser exótica, debido a que viola algunas de las condiciones antedichas. Si bien no hay ningún principio básico que prohiba cantidades macroscópicas de este tipo de materia, los efectos de los ejemplos conocidos al presente son muy pequeños (de origen cuántico). Como contribución original, mostramos que las soluciones de *wormhole* estáticos son posibles en la teoría de Brans-Dicke con materia normal en la garganta del whormhole, que satisface una ecuación de estado general. El rol de la materia exótica es desempeñado en este caso el campo escalar de Brans-Dicke.

En el capítulo III se dá un panorama general del modelo standard de la cosmología y de sus problemas, y de la teoría de la inflación, que resuelve algunos de los de ellos. A continuación se detallan las razones por las que es necesario considerar modelos cosmológicos alternativos (esto es, con menor simetría) y se hace un breve repaso de los modelos cosmológicos multidimensionales. Por último, se presenta como contribución original el estudio de la existencia de soluciones inflacionarias en modelos inhomogéneos multidimensionales. Tales soluciones son importantes en relación al problema de las condiciones iniciales necesarias para que tenga lugar una fase inflacionaria. El resultado es que el caso de una dimensión extra es singular, en el sentido de que para $n = 1$ existen soluciones inflacionarias del 3-espacio en presencia de materia descripta por la ecuación de estado $p = k\rho$ con k arbitrario. Además, los casos $k = 0$ (materia en forma de polvo) y $k = 1/3$

(radiación) sólo tienen solución si $n = 1$.

Appendix A

LA TEORIA DE BRANS-DICKE

La acción que se obtiene descartando la contribución de los campos de gauge en la acción (2.9),

$$S_4 = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_4 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{A.1}$$

está relacionada por medio de una transformación conforme [157] con la acción de la teoría de Brans y Dicke [22]:

$$S_{BD} = -\frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g}\; d^4x \left[\phi R_4 - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\right] \tag{A.2}$$

Sin embargo, cabe destacar que la teoría de Brans-Dicke tiene una motivación totalmente distinta de la teoría de Kaluza-Klein [28]. El punto de partida para la primera es el principio de Mach, según el cual la inercia debe originarse en las aceleraciones con respecto a la distribución de masas del universo [86]. Como consecuencia, la masa inercial de las partículas elementales no sería una constante fundamental, sino que debería representar la interacción (a través de algún campo) de dicha partícula con el resto de las masas del universo. Debido a que las masas sólo pueden ser medidas a través de la aceleración gravitacional Gm/r^2, es equivalente proponer que la constante gravitacional G debe estar relacionada con el valor promedio de un campo escalar Φ, acoplado a la densidad de masa del universo.

Argumentos numéricos generales muestran que $<\Phi>\approx 1/G$ [28]. Por lo tanto, Brans-Dicke modificaron las ecuaciones de Einstein incorporando al campo Φ:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\Phi}\left\{T^{\mu\nu}_{(m)} + T^{\mu\nu}_{(\Phi)}\right\} \tag{A.3}$$

donde $T^{\mu\nu}_{(m)}$ es el tensor de energía-impulso de la materia, y $T^{\mu\nu}_{(\Phi)}$, el del campo escalar.

Para que el principio de equivalencia siga valiendo es necesario que Φ no aparezca en las ecuaciones que determinan el movimiento de la materia. Esta condición se satisface si $T^{\mu\nu}_{;\mu}=0$, al igual que en la Relatividad General. Con esto alcanza para determinar las ecuaciones de movimiento, dadas por [28]

$$\Box\Phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T^{\mu}_{(m)\,\mu} \tag{A.4}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\Phi}T_{m\mu\nu} - \frac{\omega}{\Phi^2}\left(\Phi_\mu\Phi_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi^\rho_\rho\right) \tag{A.5}$$

$$-\frac{1}{\Phi}\left(\Phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box\Phi\right) \tag{A.6}$$

El parámetro ω es fundamentalmente el inverso de la constante de acoplamiento de Φ con el tensor de energía-impulso de la materia. Por lo tanto, la Relatividad General se recupera en el límite $\omega \to \infty$.

La teoría de Brans y Dicke es en realidad un caso particular de una clase de teorías mucho más generales: las teorías escalares-tensoriales (ET) [158][159][160]. El estudio de estas teorías tiene en la actualidad dos motivaciones: (1) una de las predicciones de las teorías ET es que la "constante gravitacional" es una función del tiempo, y esta es a la vez una predicción genérica de las teorías multidimensionales, y (2) las teorías ET proveen naturalmente el campo escalar necesario para generar inflación, y no necesitan por lo tanto de campos *ad-hoc*.

Las teorías ET están definidas por la acción

$$S_{ET} = \int d^4x\, \sqrt{-g}[-\Phi R + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi] \tag{A.7}$$

en la que $\omega(\Phi)$ es una función que determina la intensidad del acoplamiento entre el campo escalar y la gravedad. Nordtvedt [160] calculó la expresión de la "constante gravitacional" y de la variación temporal de la misma en el límite de campo débil; el resultado es

$$G(t) = \Phi^{-1}\frac{4+2\omega(\Phi)}{3+2\omega(\Phi)} \tag{A.8}$$

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\dot{\Phi}\left(\frac{3+2\omega(\Phi)}{4+2\omega(\Phi)}\right)\left[G + \frac{2}{(3+2\omega(\Phi))^2}\frac{d\omega}{d\Phi}\right] \tag{A.9}$$

La teoría de Brans-Dicke no permite desviaciones significativas de la Relatividad General debido a que ω = constante. Sin embargo, si ω varía con t de manera tal que $\omega \to \infty$ y $\omega^{-3}\frac{d\omega}{d\Phi} \to 0$ [162] cuando $t \to \infty$, las expresiones de campo débil (A.8) y (A.9) están en acuerdo con las de la Relatividad General , pero la teoría definida por (A.7) podría apartarse significativamente de la Relatividad General a tiempos cercanos al del comienzo de la evolución del universo [161].

Diversas observaciones dan como resultado que la variación de G con el tiempo podría ser significativa en intervalos de tiempos de orden cosmológico, pero no lo es en procesos con escalas temporales menores [163]. Esto permite definir un ω efectivo, y como consecuencia, durante el intervalo de tiempo en que este ω tiene sentido, las teorías ET pasan a ser teorías de Brans-Dicke . Por lo tanto, si bien las cotas para ω en el sistema solar (donde vale la aproximación de campo débil) hoy son $|\omega| > 500$ [164], no son necesariamente válidas a tiempos menores, donde además puede no valer la aproximación antedicha.

Bibliografía

[1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. **K1** , 966 (1921).

[2] G. Nordström, Ann. der Phys. (1914).

[3] *"Theory of Relativity"*, W. Pauli (Dover Publications, 1985).

[4] O. Klein, Z. F. Physik **37**, 895 (1926).

[5] A. Einstein y P. Bergmann, Ann. Math. **39**, 685 (1938).

[6] B. S. De Witt, en *"Relativity, Groups and Topology"*, eds. C. y B. S. De Witt (Gordon and Breach, New York, 1964).

[7] J. Rayski, Acta Phys. Polon. **27**, 947 (1965) y **28**, 87 (1965).

[8] R. Kerner, Ann. Inst. Poincaré, Sect. **A9**, 29 (1968).

[9] A, Trautmann, Rep. Math. Phys. **1**, 29 (1970).

[10] Y. M. Cho, J. Math. Phys. **16**, 2029 (1975).

[11] Y. M. Cho y P. G. O. Freund, Phys. Rev. **D12**, 1711 (1975).

[12] E. Cremmer, Z. Horvath, L. Palla, y J. Scherk, Nucl. Phys. **B127**, 57 (1977).

[13] W. Nahm, Nuc. Phys. **B135**, 149 (1978).

[14] E. Cremmer, B. Julia y J. Scherck, Phys. Lett. **B76**, 409 (1978).

[15] O. Klein, Nature **118**, 516 (1926).

[16] P. van Nieuwienhuizen, *"Simple supergravity and the Kaluza-Klein program"*, Les Houches XL, 1983.

[17] S. Perez Bergliaffa, G. Romero y H. Vucetich, Int. Jour. of Theor. Phys. **32**, 1507 (1993).

[18] L. Anchordoqui, G. Birman, S. Perez Bergliaffa y H. Vucetich, Gen. Relat. & Grav. **28**, 701 (1996)

[19] S. Perez Bergliaffa, G. Romero y H. Vucetich, Int. Jour. of Theor. Phys. (1996).

[20] G. Romero, J. Combi, S. Perez Bergliaffa y L. Anchordoqui, Astrop. Phys. **5**, 179 (1996).

[21] M. Duff, B. Nilsson, y C. Pope, Phys. Rep. **130**, 1 (1986).

[22] C. Brans y R. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[23] P. Jordan, Ann. Phys., Lpz. **1**, 219 (1947).

[24] Y. Thiry, Acad. Sci. Paris **226**, 216 y 1881 (1948).

[25] J. Barrow, Phys. Rev. D **35**, 1805 (1987).

[26] C. Chyba, Am. J. Phys. **53**, 863 (1985).

[27] L. Dolan y M. Duff, Phys. Rev. Lett. **52**, 14 (1984).

[28] *"Gravitation and Cosmology"*, S. Weinberg (Wiley, 1972).

[29] C. Yang y R. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[30] *"General Relativity"*, R. Wald (Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).

[31] *"Differential Geometry for Physicists"*, A. Trautman (Bibliopolis, 1984).

[32] S. Weinberg, Phys. Lett. **125B**, 265 (1983).

[33] A. Love y D. Bailin, Rep. Prog. Phys. **50**, 1087 (1987).

[34] P. Freund y M. Rubin, Phys. Lett. **97B**, 233 (1980).

[35] L. Castellani, R. D'Auria, P. Fré, K. Pilch y P. van Nieuwenhuizen, Class. & Q. Grav. **1**, 339 (1984).

[36] E. Witten, Nuc. Phys. **B195**, 481 (1982).

[37] S. Randjbar-Daemi, A. Salam, J. Strathdee, Nuc. Phys. **B214**, 491 (1983).

[38] S. Randjbar-Daemi, A. Salam, J. Strathdee, Phys. Lett. **132B**, 56 (1983).

[39] E. Cremmer y J. Scherk, Nuc. Phys. **108**, 409 (1976).

[40] N. Manton, Nuc. Phys. **B158**, 141 (1979).

[41] *"The Large Scale Structure of Space-Time"*, S. Hawking y G. Ellis (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).

[42] C. Wetterich, Phys. Lett. **113B**, 377 (1982).

[43] T. Appelquist y A. Chodos, Phys. Rev. D **28**, 772 (1983).

[44] P. Candelas y S. Weinberg, Nucl. Phys. **B237**, 397 (1984).

[45] P. Schoen y S. Yau, Phys. Rev. Lett. **43**, 1457 (1979).

[46] M. Rubin y B. Roth, Phys. Lett. **127B**, 55 (1983).

[47] M. Duff, B. Nilsson, C. Pope, y N. Warner, Phys. Lett. **149B**, 90 (1984).

[48] Y. Cho y P. Jang, Phys. Rev. D **12**, 3138 (1975).

[49] F. Mansouri y L. Witten, Phys. Lett. **127B**, 341 91983).

[50] Y. M. Cho, Phys. Rev. D **35**, 2628 (1987).

[51] E. Witten, Nuc. Phys. **186**, 412 (1981).

[52] F. Berends, J. Holten, B. de Wit, y P. van Nieuwenhuizen, Nuc. Phys. **B154**, 261 (1979).

[53] A. Lichnerowitz, C. R. Acad. Sci., Paris A-B **257**, 7 (1963).

[54] A. Schellekens, Nuc. Phys. **B250**, 252 (1985) y **B262**, 661 (1985).

[55] J. Luciani, Nuc. Phys. **135**, 111 (1978).

[56] M. Morris y K. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988)

[57] A. Einstein y N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935)

[58] M. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).

[59] H. Reissner, Ann. Phys. (Germany) **50**, 106 (1916).

[60] G. Nordstrom, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20**, 1238 (1918).

[61] M. Visser, Phys. Rev. D **46**, 2445 (1992).

[62] J. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).

[63] C. Misner y J. Wheeler, Ann. Phys. (USA), **2**, 525 (1957).

[64] R. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).

[65] E. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash y R. Torrence, J. Math. Phys. **6**, 918 (1965).

[66] S. Coleman, Nuc. Phys. **B320**, 643 (1988).

[67] *"Lorentzian Wormholes"*, M. Visser (AIP Press, 1996).

[68] S. Hawking, Phys. Rev. D **46**, 603 (1992).

[69] *"Gravitation"*, C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler (W. Freeman & Company, San Francisco 1973).

[70] *"Riemannian Geometry"*, L. Eisenhart (Princeton University Press, 1949).

[71] *"Relativity and Modern Physics"*, G. Birkhoff, Harvard University Press (1923).

[72] H. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[73] K. Howard, Phys. Rev. D **30**, 2532 (1984).

[74] H. Epstein, V. Glasser y A. Jaffe, Nuovo Cimento **36**, 1016 (1965).

[75] D. Hochberg, Phys. Lett. **B251**, 349 (1990).

[76] J. Moffat and T. Svodoba, Phys. Rev. D **44**, 429 (1991).

[77] B. Bhawal and S. Kar, Phys.Rev. D **46**, 2464 (1992).

[78] A. Agnese and M. La Camera, Phys. Rev. D **51**, 2011 (1995).

[79] F. Accetta, A. Chodos and B. Shao, Nuc. Phys. **B333**, 221 (1990)

[80] P. S. Letelier and A. Wang estudiaron algunas soluciones de *wormhole* en la teoría de Brans-Dicke desde el punto de vista de burbujas en Phys. Rev. D **48**, 631 (1993).

[81] W. Bruckman and E. Kazes, Phys. Rev. D **16**, 261 (1977).

[82] S. Kar and D. Sahdev, Phys. Rev D **52**, 2030 (1995).

[83] *"Higher transcendental functions"* (Bateman Manuscript Project), editado por A. Erdélyi *et al* (McGraw-Hill, N.Y., 1955), Vol. I p. 101 and Vol. III, p.267.

[84] G. Chapline y G. Gibbons, Phys. Lett. **B135**, 43 (1984).

[85] P. Freund, Nuc. Phys. **B209**, 146 (1982).

[86] *"The Science of Mechanics"*, E. Mach (Open Court Pub. Co, 1893).

[87] S. Shectman, P. Schecter, A. Oemler, D. Tucker, R. Kirshner y H. Lin, en *"Clusters and Superclusters of galaxies"*, editado por A. Fabian (Kluwer, Dordrecht, 1993).

[88] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

[89] *"Inflation after COBE - Lectures on Inflationary Cosmology"*, M. Turner, FERMILAB - Conf. 92/313-A.

[90] Ver A. Eddington, *"The Mathematical Theory of Relativity"* (Cambridge Univ. Press, London, 1924).

[91] C. Wirtz, Scientia **38**, 303 (1925).

[92] K. Lundmark, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **84**, 747 (1924).

[93] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1927).

[94] *"The Early Universe"*, E. Kolb y M. Turner (Addison-Wesley, 1990).

[95] G. Gamow, Phys. Rev. D **70**, 572 (1946).

[96] A. Penzias y R. Wilson, Ap. J. **142**, 419 (1965).

[97] G. Smoot *et al*, Ap. J. **396**, L1 (1992).

[98] T. P. Walker *et al*, Ap. J. **376**, 51 (1991).

[99] P. Peebles, D. Schramm, E. Turner y R. Kron, Nature **352**, 769 (1991).

[100] J. Jeans, Phil. Trans. Roy. Soc., **199A**, 49 (1902).

[101] *"Cosmology"*, P. Coles y F. Lucchin (J. Wiley, 1995).

[102] M. Fukugita, C. Hogan y P. Peebles, Nature 1993.

[103] V. de Lapparent, M. Geller y J. Huchra, Ap. J. Lett. **302**, L1 (1986).

[104] T. Broadhurst, R. Ellis, D. Koo y A. Szalay, Nature **343**, 726 (1990).

[105] S. Carroll, W. Press y E, Turner, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 499 (1992).

[106] S. Weinberg, Phys. Rev. D **9**, 3357 (1974).

[107] Dolan y R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).

[108] T. Kibble, J. Phys. **A9**, 1387 (1976).

[109] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).

[110] A. Linde, *Lectures on inflationary cosmology"* (1994).

[111] M. MacCallum, *Anisotropic and inhomogeneous cosmologies*, en "General Relativity: an Einstein centenary survey" (Cmbridge U. Press, 1979).

[112] C. Collins, Comm. Math. Phys. **23**, 137 (1971).

[113] A. Harvey, J. Math. Phys. **20**, 251 (1979).

[114] R. Kantowski y R. Sachs, J. Math. Phys. **7**, 443 (1966).

[115] *"Homogeneous Relativistic Cosmologies"*, M. Ryan y L. Shepley (Princeton Univ. Press, 1975).

[116] L. Bianchi, Mem. di Mat. Soc. Ital. Sci. **11**, 267 (1897).

[117] M. MacCallum, *"Anisotropic and inhomogeneous cosmologies"* (1992).

[118] E. Lifchitz y I. Khalatnikov, Adv. Phys. **12**, 185 (1963).

[119] C. Misner, Ap. J. **151**, 431 (1968).

[120] M. MacCallum, Nature (Phys. Sci.) **230**, 112 (1971).

[121] J. Barrow y P. Tipler, Nature **271**, 453 (1978).

[122] G. Ellis, R. Maartens y S. Nel, Mon. Not. R.A.S. **184**, 439 (1978).

[123] G. Ellis, J. Math. Phys. **8**, 1171 (1967).

[124] J. Wainwright, J. Phys. A **14**, 1131 (1981).

[125] J. Wainwright y S. Goode, Phys. Rev. D **22**, 1906 (1980).

[126] D. Kramer, Class. & Q. Grav. **1**, L37 (1984).

[127] J. Senovilla, Phys. Rev. Lett. **64**, 2219 (1990).

[128] P. Szekeres, Comm. Math. Phys. **41**, 55 (1975).

[129] D. Szafron, J. Math. Phys. **18**, 1673 (1977).

[130] D. Eardley, Comm. Math. Phys. **37**, 287 (1974).

[131] C. Hewitt, J. Wainwright y S. Goode, Class. & Q. Grav. **5**, 1313 (1988).

[132] A. Demichev, Yu. Kubyshin y J. Perez Cárdenas, Phys. Lett. **B323**, 139 (1994).

[133] I. Antoniadis, K. Benakli y M. Quirós, Phys. Lett. **B331**, 313 (1994).

[134] P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. **69**, 191 (1981).

[135] *"Superstring theory"*, M. Green, J. Schwartz y E. Witten (Cambridge U. Press, 1987).

[136] S. Randjbar-Daemi, A. Salam y J. Strathdee, Phys. Lett. **135B**, 388 (1984).

[137] E. Alvarez y M. Belen-Gavela, Phys. Rev. Lett. **51**, 931 (1983).

[138] Y. Okada, Phys. Lett. **150B**, 103 (1985).

[139] Q. Shafi y C. Wetterich, Phys. Lett. **129B**, 387 (1983).

[140] J. Demaret y J. Hanquin, Phys. Rev. D **31**, 258 (1985).

[141] G. Fee, Tesis de maestrado en Matemática, Universidad de Waterloo, Ontario (1979).

[142] D. Lorenz-Petzold, Phys. Lett. **B175**, 405 (1986).

[143] D. Lorenz-Petzold, Phys. Lett. **B151**, 105 (1985), y Phys. Lett. **B158**, 100 (1985).

[144] J. Demaret, J. Hanquin, M. Hennaux y P. Spindel Nuc. Phys. **B252**, 538 (1985).

[145] J. Barrow y K. Kunze, *hep-th* 9608045.

[146] J. Barrow y M. Dabrowski, *hep-th* 9608136.

[147] J. Barrow y K. Kunze, *hep-th* 9701085.

[148] S. Chatterjee, D. Pahigrahi y A. Banerjee, Class. & Q. Grav. **10**, 371 (1993).

[149] S. Chatterjee y A. Banerjee, Class. & Q. Grav., **10**, L1 (1993).

[150] S. Chaterjee, B. Bhui, M. Basu y A. Banerjee, Phys. Rev. D **50**, 2924 (1994).

[151] A. Banerjee, D. Panigrahi y S. Chatterjee, J. Math. Phys. **36**, 3619 (1995).

[152] R. Wald, Phys. Rev. D **28**, 2118 (1983).

[153] L. Jensen y J. Stein-Schwabes, Phys. Rev. D **35** 1146 (1987).

[154] N. Deruelle y D. Goldwirth (1994).

[155] O. Iguchi y H. Ishihara (1996).

[156] A. Starobinskii, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980).

[157] Y. Cho, Phys. Rev. Lett. **68**, 3133 (1992).

[158] P. Bergman, Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968).

[159] R. Wagoner, Phys. Rev. D **1**, 3209 (1970).

[160] K. Nordtvedt, Phys. Rev. D **169**, 1017 (1968).

[161] J. Barrow y K. Maeda. Nuc. Phys. **B341**, 294 (1990).

[162] *"Theory & experiment in gravitational physics"*, C. Will (Cambridge U. Press, 1992).

[163] J. Barrow y P. Parsons (1996).

[164] R. Reasenberg, Astrophys. J. **234**, L291 (1979).